Pedagogisk utveckling vid KTH

Matematikutbildningen från grundskola till teknisk högskola

i går – i dag – i morgon

Matts Håstad

Oktober 1978
Rapport TRITA-EDU-016

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549218_0001

TRITA-EDU-016

MATEMATIKUTBILDNINGEN FRÅN GRUNDSKOLA TILL TEKNISK HÖGSKOLA
I GÅR - I DAG - I MORGON

Matts Håstad

Stockholm 1978

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

ISBN 91-85212-37-7

Matts Håstad 1978

Centrum för Pedagogisk Utveckling
Tekniska Högskolan
100 44 Stockholm

Utskrift och layout: Eva Lundquist

Printed in Sweden 1978

Reprocentral I, KTH

Innehållsförteckning

		3
Abstract		4
INLEDNING OCH SAMMANFATTNING		5
1	MATEMATIKUNDERVISNINGENS VILLKOR	23
1.1	Några modellfragment	23
1.1.1	Mål för matematikundervisning	23
1.1.2	Bruks- och initiativkunskaper	31
1.1.3	Primär- och sekundärkunskaper	33
1.1.4	Spik- och skruvinlärande	38
1.1.5	Potentialen hos en matematikutbildning	47
1.2	Några begrundanden	64
1.2.1	Om matematisk modell och svårigheten att tillämpa matematik	64
1.2.2	Uppgiftslösande och diagnostiska prov	69
1.2.3	Matematikundervisning - teoretisk eller praktisk	77
2	SVENSK MATEMATIKUNDERVISNING I GÅR OCH I DAG	83
2.1	Utvecklingen sedan 1950-talet	83
2.1.1	Hemarbetet under skoltiden	83
2.1.2	Potentialen på 1950- och 1970-talet	96
2.1.3	Förändringar i mål, ramar, process och resultat	112
2.2	Makthavarna inom svensk matematik-undervisning	134
2.3	Matematikutbildning för teknologer och ingenjörer	152
2.3.1	Stoffinnehåll	152
2.3.2	Att tillämpa matematik	159
2.3.3	Är matematikundervisningen för teoretisk?	162
2.3.4	Uppgiftslösandet i matematik	165
2.3.5	Är matematiken för svår?	166

3	SVENSK MATEMATIKUNDERVISNING I MORGON	177
3.1	Skolan	179
3.1.1	Perspektiv	179
3.1.2	Förslag	191
3.2	Teknisk högskola	193
3.2.1	Perspektiv	193
3.2.2	Förslag	200
SUMMARY IN ENGLISH		211
REFERENSER		217

Abstract: Håstad, M., 1978, Matematikutbildningen från grundskola till teknisk högskola i går - i dag - i morgon. (Training in mathematics from grade school to technical university yesterday - today - tomorrow.) TRITA-EDU-016. Stockholm.

A didactical analysis of some aspects of mathematics learning and teaching is made including the separation of the goals into subgoals, distinction between degrees of knowledge as to the way mathematics is used and the concept of potential of a mathematics education. A study is made of the development during the last decade of the mathematics teaching in Sweden including the introduction and declination of "New Mathematics", the consequences of the far-reaching restructuring of the school system and an analysis of which persons have the greatest influence on the development. The extent to which mathematics teaching has been reduced and the classes made more heterogenious is measured. The mathematics teaching in higher technical education is analysed based on interviews and questionnaires with students, teachers and examined engineers. Suggestions are given for future teaching.

Indexed:

1) Mathematics teaching

2) Evaluation

3) Mathematics for engineers

INLEDNING OCH SAMMANFATTNING

Syfte med rapporten

Att matematikundervisning i dag går till som den gör är resultatet av en århundradelång empirisk process. Denna process kännetecknas inte av några tvära kastningar eller plötsliga upptäckter utan den har utvecklats relativt långsamt och försiktigt. De vetenskapliga kunskaperna om vad som kännetecknar och styr denna process är ringa. Lärare och i viss mån elever är emellertid bärare av en stor mängd - delvis förborgad - visdom om matematikundervisning och dess villkor. Denna visdom borde föras till ytan och systematiseras. Det är på denna punkt min rapport kommer in. Syftet med den är att öka förståelsen för matematikundervisningens utveckling som empirisk process. Genom att analysera dagens situation och vad som hänt de närmast föregående decennierna kan vi kanske få underlag till att styra utvecklingen åt ett önskvärt håll. Kanske är det så att vi tidigare ibland har dragit felaktiga slutsatser av det vi observerat om matematikundervisning och matematikinlärande så att vi råkat in i återvändsgränder utvecklingsmässigt sett.

Resultat i löpsedelsform

Mina analyser innebär av naturliga skäl inget epokgörande nytt. Syftet är ju främst att förklara det som äger rum i dag. En kvällstidning skulle kanske kunna spetsa till de mer intressanta rönen i löpsedelsform:

MÅNGA SVENSKAR KLARAR SIG MED BRUKSKUNSKAPER I MATEMATIK

SKRUVINLÄRANDE VANLIGARE ÄN MAN TROR

POTENTIAL EN NY MÄTARE PÅ MATEMATIKKUNNANDE

MÅNGA LÄR SIG ALDRIG TILLÄMPA MATEMATIK

UPPGIFTSLÖSANDE BRA - FÖRESLÅS EJ AVSKAFFAT

DIAGNOSTISKA PROV ÖVERSKATTADE

MATEMATISK MODELL - SVÅRTILLGÄNGLIG IDE

KOMPROMISS PÅ VÄG OM MATEMATIKENS TEORINIVÅ

HEMARBETET MINDRE ÄN FÖRR

MATEMATIKEN I DAG: MINDRE TID - SÄMRE ELEVER

RÄKNEFÄRDIGHETEN SÄMRE I SVERIGE

HISTORIEN KRING DEN NYA MATEMATIKEN AVSLÖJAD

SKOLMATEMATIKENS MAKTHAVARE AVLÖJADE

MATEMATIKEN PÅ TEKNISK HÖGSKOLA EJ FÖR SVÅR MEN UNDERVISNINGEN BEHÖVER AKTIVERAS

PERIODINDELNING AV SKOLMATEMATIKEN GÖR BETYG ONÖDIGA

TILLVALSSYSTEM ERSÄTTER ALTERNATIVKURSUPPDELNING

VAD VI VET OM DE TEKNISKA HÖGSKOLORNAS MATEMATIKUNDERVISNING

Undersökningen

Jag har valt att studera matematikundervisningen för personer som har stort behov av matematik i sin utbildning och i sitt arbete. Det gäller maskiningenjörer utbildade vid Tekniska Högskolan i Stockholm. Jag har följt och diskuterat deras matematikinlärande från skolgångens början vid sjuårsåldern till högskoletiden och deras yrkesverksamhet.

Med denna uppläggning har jag kunnat inskränka mig till de rent kognitiva delarna av matematikinlärandet. I den tolvåriga skolan är målet för matematikundervisningen i hög grad uppblandat med skolans sociala och personlighetsutvecklande mål. Skulle studiet ha gällt skolans matematik för alla elevkategorier hade dessa mål måst beaktas i hög grad.

Undersökningens uppläggning innebär inte att de resultat som jag kommer fram till är begränsade till maskiningenjörer utbildade vid KTH. Tvärtom diskuteras många allmängiltiga frågor som angår alla typer av matematikinlärande på grund-, gymnasie- och högskolenivå.

Undersökningens förlopp

Det ursprungliga syftet med undersökningen var mer "matematiskt". Jag avsåg att ta reda på vilka matematiska moment som behövdes i olika utbildnings- och yrkessammanhang och att också studera resultat från prov och tentamina i matematik för att kartlägga omfattningen av elevernas kunskaper. Jag inledde också ett studium av läroböcker, tentamina och laborationsuppgifter i ämnen vid en teknisk högskola som tillämpar matematik. Detta visade sig emellertid knappast kunna leda någonstans. Det blir en lång lista av matematikmoment som används åtminstone i någon situation och det blir en prioriteringsfråga vilka moment som bör ges företräde. Detta är ett svårt värderingsproblem för vilket man saknar lämpliga instrument. Till detta kommer svårigheten att mäta vilken arbetsinsats det krävs för att tillägna sig ett moment. Inlärningsprocessen är för komplex och sammanhanget mellan inlärning av olika moment för komplicerat. I detta läge beslöt jag mig för att arbeta på ett mer övergripande sätt.

Genom intervjuer, enkäter och informella samtal fördjupade jag mina kunskaper om dagens matematikundervisning. Jag ägnade åtskillig tid åt att försöka strukturera de erfarenheter jag fått från min snart

25-åriga yrkesverksamhet, som till stor del avsett matematikundervisning på olika stadier och i olika former. Successivt hade jag fått allt större respekt för betydelsen av de under sekler samlade erfarenheterna om hur matematikinlärande går till och hur därmed matematikundervisning kan bedrivas. Det blev då särskilt intressant att studera de senaste decenniernas bidrag till den empiriska process det rör sig om. Mina egna erfarenheter kompletterades genom litteraturstudier. För att framhäva vissa drag i utvecklingen behövde jag vissa redskap. En del av dem fanns redan i litteraturen men jag utvidgade möjligheterna genom att införa begrepp som spik- och skruvinlärande, bruks- och initiativkunskaper, primärkunskap och potential hos en matematikutbildning.

För att kunna sia om hur matematikundervisningen kommer att utvecklas i framtiden upplevde jag det som viktigt att fundera kring vilka intressentgrupper som betytt mest för dagens situation. Det ledde till en analys av makthavarna. Mot bakgrund av denna strukturering av mina erfarenheter har jag dristat mig att extrapolera utvecklingen. Det resulterade i de principer som jag formulerat om 1980-talets matematikundervisning.

Undersökningens huvudinnehåll blir därmed följande.

- En analys av matematikundervisningen vid en teknisk högskola (avsnitt 2.3).
- En analys av hur skolans matematikundervisning utvecklats under de senaste 20 åren (avsnitt 2.1 och 2.2).
- Ett försök att belysa viktiga delar i ovanstående analyser utifrån vissa "teorifragment", som skulle kunna inordnas i en mer övergripande teori (kapitel 1).
- Ett förslag angående den framtida svenska matematikundervisningen (kapitel 3).

Rapportens uppläggning

Rapporten är disponerad på följande sätt. Det första kapitlet diskuterar matematikundervisningens villkor utan någon uppdelning på stadier. I avsnitt 1.1 ställer jag upp vissa modellfragment, som i resten av rapporten används för att beskriva vissa företeelser i svensk matematikundervisning. Det gäller

- en uppdelning av matematikens mål i fem delmål
- begreppen brukskunskaper och initiativkunskaper
- begreppen primärkunskaper och sekundärkunskaper
- begreppen spik- och skruvinlärande
- begreppet matematikundervisningens potential (det är en kombination av den tid som används för undervisning och den nivå undervisningen ligger på).

Innebörden i dessa begrepp förklaras vidare på sid 8 - 10 i sammanfattningen.

Avsnitt 1.2 innehåller några begrundanden avseende matematikinlärande. Där beskrivs först begreppet matematisk modell och diskuteras svårigheterna att lära sig tillämpa matematik. Sedan behandlas uppgiftslösande och diagnostiska prov. Slutligen försöker jag upprätta en distinktion mellan teoretisk och praktisk matematikundervisning.

Kapitel 2 behandlar svensk matematikundervisning av i går och i dag. Avsnitt 2.1 diskuterar utvecklingen sedan 1950-talet, uppdelat på grundskolenivån, gymnasienivån och högskolenivån. Det i avsnitt 1.1.5 framtagna potentialbegreppet används och potentialen beräknas för olika matematikutbildningar. Ett särskilt parti ägnas hemarbetet i skolan.

Avsnitt 2.2 ägnas makthavarna inom svensk matematikundervisning. Vill man förbättra matematikundervisningen är det angeläget att få ett begrepp om vilka personer som har särskilt stort inflytande.

I avsnitt 2.3 diskuteras problem förknippade med matematikutbildningen för teknologer och ingenjörer. Därvid utnyttjas de intervjuer och enkäter som tidigare redovisats i rapporten "Sju enkäter om matematikundervisning" (Håstad, 1977). Den kallas i fortsättningen "Sju enkäter".

Kapitel 3 ägnas framtiden. Det är betitlat Svensk matematikundervisning i morgon. Det är uppdelat i två halvor; en ägnas skolans och en den tekniska högskolans matematikutbildning. Som underlag sammanfattas först de resultat som erhållits genom min undersökning och citeras vissa andra källor. Slutligen ges ett förslag till organisation av skolans matematikundervisning samt formuleras en rad PRINCIPER om de tekniska högskolornas matematikundervisning.

I fortsättningen av denna sammanfattning ges kortfattade sammandrag av innehållet i de olika avsnitten.

Mål för matematikundervisning

Någon universell gemensam uppfattning saknas om vilket målet för matematikundervisningen bör vara. Det illustreras av debatten vid den tredje världskongressen angående matematikundervisning 1976, då målet för matematikundervisningen var ett av huvudtemana. Man kan särskilja två huvuduppfattningar för att matematik bör studeras:

- av nyttoskäl
- av personlighetsutvecklande och kulturella skäl.

I Sverige har det förstnämnda skälet varit det dominerande.

Man har försökt använda olika slag av taxonomier på matematikinlärande men funnit flera svårigheter. Hur ska t ex räknefärdighet, problemlösningsförmåga och tillämpningsförmåga klassificeras? En rad andra taxonomier för matematik har tagits fram.

Jag har själv med utgångspunkt i sådana taxonomier gjort en uppdelning av målet för matematikundervisningen i fem delmål. De är:

A Räknefärdighet

B Begreppsförståelse

C Metodkännedom

D Problemlösningsförmåga

E Tillämpningsförmåga

Varje sådant delmål kan uppdelas i nivåer på sådant sätt att man måste ha uppnått samma nivå avseende alla delmålen innan man kan uppnå en högre nivå för något delmål. Denna "onda cirkel" kombinerat med matematikens hierarkiska struktur är en viktig orsak till att det är så svårt att lära sig matematik.

Denna uppdelning i fem delmål A - E har jag använt i uppläggningen av enkäterna redovisade i "Sju enkäter" och i analyserna i fortsättningen av denna rapport.

Bruks- och initiativkunskaper

Beroende på hur matematik används inför jag två begrepp - brukskunskap och initiativkunskap. Det förstnämnda avser ett mer passivt kunnande som innebär att en person kan klara ett matematiskt problem som tränger sig på vederbörande. Brukskunskapen är färdig att använda och man har lärt sig precis det man behöver kunna. Till skillnad häremot avser initiativkunskap snarast en sorts kunskapsberedskap, varvid man kan ta egna initiativ och tillämpa sitt kunnande på ett nyanserat sätt.

Det är svårare att utbilda till initiativkunskaper än brukskunskaper. Bl a är det svårt att testa om en elev har initiativkunskaper. De fordrar också en positiv affektiv inställning hos eleven.

Det finns skäl att i en analys av matematikundervisning skilja på de båda typerna av kunskap.

Primär- och sekundärkunskaper

Matematikkunskaper som man tror att man inte har eller som man är mycket osäker på är mindre värdefulla. Det är framför allt sådana kunskaper som man är säker på - jag kallar dem primärkunskaper - som man har verklig nytta av när det gäller att tillämpa matematik. Det är bara sådana kunskaper som har utsikt att bli bestående. Andra typer av kunskaper - jag kallar dem sekundärkunskaper - är också nyttiga. De utgör bl a ett steg på vägen mot primärkunskaper. Vidare är sekundärkunskaper inom ett större område en förutsättning för primärkunskaper inom ett delområde till detta.

Spik- och skruvinlärande

Jag särskiljer i avsnitt 1.1.4 två slags inlärningsmetoder kallade spik- och skruvinlärande. Skruvinlärandet är i grova drag "som livet lär", en långsam inlärningsform där repetition, återkoppling och omvärldskontakter är dominerande. Spikinlärandet är mer systematiskt, verbalt och förståelseinriktat. Analyserar man olika undervisningsprinciper, "trial and error", "projektinriktning", "heuristisk undervisning" osv finner man att de är laddade med spik- och skruvinlärande i växlande grad.

Syftet med att diskutera så pass svåravgränsade begrepp som spik- och skruvinlärande är bl a att kunna fästa uppmärksamheten på i vilken utsträckning en undervisningsmetod liknar det sätt "livet lär en på" eller om den är teoretisk och skolmässig. Utbildning kan i detta hänseende uppfattas vara av tre huvudslag:

- Presentation av övningsmättade situationer vid vilka inlärning kan äga rum
- Hjälp att förstå sin omvärld
- Uppbyggnad av en modellvärld att omsätta i initiativkunskaper

Skruvinlärande dominerar det första slaget och är ett betydelsefullt inslag även i det andra slaget.

Potentialen hos en matematikutbildning

De viktigaste ramfaktorerna för ett framgångsrikt matematikinlärande är den tid som eleverna har till sitt förfogande och elevernas inlärningsförmåga. Detta kan man konstatera vid studium av forskningslitteraturen. Teoribildningen är emellertid mycket bristfällig bl a på grund av svårigheter att mäta ingående variabler. Det kan i denna situation vara av intresse att ställa upp även starkt makrobetonade modeller för att jämföra dessa ramfaktorer i olika skolformer. Exempelvis torde matematikundervisningen i en viss skolform vanligtvis få en ganska uniform uppläggning över hela landet. Vilken denna blir avgörs främst av matematikförmågan hos de elever som följer undervisningen. Lärarna följer en hävdvunnen praxis som endast förändras långsamt. Vissa forskningsresultat tyder på att elever inom den tionde till tjugofemte percentilen (nerifrån räknat) i matematikförmåga är särskilt styrande för undervisningen. Jag har därför tagit den matematiska förmågan hos elever vid den nedre kvartilen som avgörande för vilken nivå undervisningen ligger på. Den matematiska förmågan hos en odifferentierad grupp svenskar förutsätts vara normalfördelad och ej ändras med tiden. Genom att spåra matematikbetygen hos elever vid nedre kvartilen bakåt tills eleverna gick i den obligatoriska skolan kan nivån hos olika matematikutbildningar jämföras. Tid använd för matematikinlärande antas i modellen vara desto värdefullare ju högre nivån är. Jag definierar begreppet potential för en matematikutbildning. Det är summan av den tid som läggs ned på matematikinlärande, varvid varje tid multipliceras med en faktor som är högre ju högre nivån är. Potentialbegreppet används längre fram i rapporten för att jämföra 1950-talets och 1970-talets svenska matematikutbildning.

Om matematisk modell och svårigheten att tillämpa matematik

När man i en praktisk situation använder matematik på ett icke-trivialt sätt kan det uppfattas ske genom att man utnyttjar en matematisk modell. Därvid kan man särskilja tre steg:

1 Hitta en lämplig modell

2 Göra beräkningar inom modellen

3 Tolka resultaten tillbaka till verkligheten.

Varje steg har sina principiella problem.

Det har visat sig svårt att hitta lämpliga former för att undervisa i matematiktillämpning. Några skäl till detta är:

- Det är ett delat ansvar mellan lärare i matematik och andra ämnen att undervisa i tillämpning av matematik. Ett sådant delat ansvar innebär många praktiska svårigheter.
- Begreppet "matematisk modell" har visat sig vara intellektuellt svårtillgängligt.
- Det är svårt att hitta de lagom komplicerade modeller som behövs för optimal pedagogisk effekt.
- Det är svårt att hitta lämpliga tidpunkter att placera in tillämpningarna.
- Det kräver mycket goda matematikkunskaper att tillämpa matematik. Ofta underskattas kraven.
- Att tillämpa matematik kräver mycket tid.
- Många matematiklärare har en felaktig utbildning och inställning.

Om uppgiftslösande och diagnostiska prov

Uppgiftslösandet dominerar matematikundervisningen vilket är särskilt utpräglat i Sverige. En analys visar att de flesta delmålen går att uppnå med hjälp av uppgiftslösning. Framför allt gäller det räknefärdigheten medan det finns risker att begreppsförståelsen utvecklas dåligt för stora grupper studerande som inte tillhör de utpräglat matematikbegåvade.

Fördelarna dominerar över nackdelarna med att ha uppgiftslösning som dominerande arbetsform, varför vi förmodligen bör behålla den i stort sett sin i sin nuvarande omfattning.

Individevalueringen i matematik görs i allmänhet också genom uppgiftslösning. Det får konsekvensen att räknefärdighet, metodkännedom och elementär begreppsförståelse i praktiken blir de dominerande delmålen.

Tillämpningsförmåga, kvalificerad begreppsförståelse och problemlösningsförmåga krävs bara för att klara de svårare uppgifterna vid prov och examina. Därigenom kommer de i skymundan som delmål för den stora majoriteten matematikstuderande. Om en elev, som knappt klarat en viss matematikkurs, kan man därför med stor sannolikhet uttala

- att han/hon har dokumenterat förståelse och färdighet på kursen före den aktuella kursen
- att han/hon inte har annat än orienteringskunskaper därutöver.

Vad gäller de diagnostiska proven så konstaterar jag att de används mer nu än tidigare, vilket inneburit många vinster och förbättrade inlärningsresultat. De har emellertid inte fått den betydelse för matematikundervisningen som man hoppats under utbildningsteknologins höjdpunkt på 1960-talet. Skäl för detta är bl a:

- Det är svårt att i en vanlig skolklass ordna den uppföljning som proven förutsätter.
- Misslyckande på en uppgift på ett prov beror relativt ofta på brister i elevens tidigare skolutbildning. Sådana brister är svårreparerade.
- Ofta testar diagnostiska prov en för ytlig kunskap. Trots att en elev klarat det diagnostiska provet är det ingen garanti för bestående kunskaper.
- De diagnostiska proven hjälper ofta inte lärarna att veta varför eleven gjort fel. Lärarna tenderar till att bara "lotsa" eleven rätt och kan ofta inte ge verklig hjälp.

Matematikundervisning - teoretisk eller praktisk

Matematik kan undervisas på ett mer eller mindre abstrakt sätt. Några ytterligheter anges nedan.

Teoretiskt	Praktiskt
Alla införda begrepp definieras noggrant.	Nya begrepp införs på ett intuitivt sätt.
Teorin formuleras i satser med preciserade förutsättningar.	Satser formuleras ej.
Uppläggningen är logisk-deduktiv. Alla satser bevisas.	Bevis förekommer sällan. Liten vikt läggs vid momentens inbördes samband.
Satser presenteras generellt. Bokstavsbeteckningar används i stället för siffror.	Matematiken byggs upp på enklaste sätt för att hjälpa eleverna lösa aktuella problem.

Genom att analysera för- och nackdelar med dessa båda ytterlighetsmetoder kan man finna lämpliga kompromisser.

Hemarbetet under senare år

Att mäta omfattningen av elevernas hemarbete är svårt. Utförda undersökningar har med rätta kritiserats av många skäl. Det har emellertid gjorts en hel del sådana. De kan användas för relativa jämförelser mellan skolformer och tidsepoker även om de absoluta talen är osäkra. Jag har tagit fram en rad sådana äldre undersökningar och jämfört med några från senare år. Följande försiktiga slutsatser kan dras.

- Totaltiden för hemarbete har minskats successivt under de senaste årtiondena.
- En förskjutning har skett från läxor till arbete som eleven pålägger sig själv.
- Hemarbetet i matematik uppskattas att i gamla gymnasiets matematiska gren i medeltal ha varit ca 3 h per vecka mot i dag på N- och T-linjen ca 2 h per vecka.

Tid och potential för matematik på 1950- och 1970-talet

Genom ett omfattande studium av utbildningsstatistik från 1950-1970-talet har jag lyckats uppskatta den tid som lagts ned på matematikinlärande. Genom att omräkna denna tid i arbete i odifferentierad klass har jag kunnat uppskatta effekten av ändringar i klassernas nivå vad gäller matematikförmåga. Det gäller alltså begreppet potential från sid 10. Resultaten som citeras nedan gäller den modell där nivån betyder förhållandevis mera.

	1950-talet	1970-talet
Tid före gymnasiet	1 100 h	830 h
Potential före gymnasiet	1 300 h	900 h
Tid före M-KTH	2 000 h	1 400 h
Potential före M-KTH	3 100 h	1 900 h

Man konstaterar en kraftig minskning från 1950-talet till 1970-talet. Därmed påvisas en viktig orsak till den försämring av resultaten av skolans matematikundervisning som konstaterats under senare år.

Utvecklingen av grundskolans matematik

Matematikundervisningen var relativt statisk fram till 1960. En viktig reform var dock försöksverksamheten med enhetsskola. I och med Lgr 62 infördes grundskolan. Den stora reformen var införandet av den nya matematiken i och med Lgr 69. Nyttoaspekten har dominerat målet för matematikundervisningen. Räknefärdigheten har hela tiden varit det viktigaste delmålet. Tillämpningar ("praktiska räkneexempel") har alltid uppfattats som viktiga men de har ändå aldrig kommit ifrån sin stämpel av "skolbokstal". Problemlösningen har successivt minskat i betydelse.

Skolsystemets uppbyggnad har omstrukturerats. Följande ändringar har varit särskilt kännbara för matematikens del.

- Realskolan - urvalsskolan - är borta
- Betygsystemet är ändrat. Underbetygen är borta. Kvarsittning förekommer inte.
- Alla grundskoleelever läser matematik i nio år
- Den avrundande realexamen har slopats
- Läxläsningen har minskat
- Tiden för matematikinlärande har minskats

Genom dessa ändringar i ramarna för skolmatematiken har piskan som många elever erfor försvunnit. Tyvärr har skolan inte hittat någon bra morot att ersätta den med.

Vad gäller stoffinnehållet kan följande utveckling konstateras.

- Sifferräkningens komplexitet har minskat
- Bråkräkningen har förenklats
- Överslagsräkningen har förstärkts
- Det arbetas mer med tabeller, diagram och statistik
- Problemlösningen har minskat
- Geometrin har ändrat karaktär

Arbetsformerna har inte ändrats så mycket för låg- och mellanstadiet. Undervisningen har blivit mindre abstrakt och laborativa metoder används mer. På högstadiet har arbetsformerna ändrats mer. Den tidigare vanliga tavelräkningen med sammanhållen klass har ersatts av "tyst räkning". Lärarens genomgångar har reducerats.

Undervisningen är fortfarande differentierad på högstadiet men heterogeniteten inom klasserna har ökat väsentligt. Ökad uppmärksamhet ägnas numera åt de svagpresterande eleverna.

Resultaten är i stort sett oförändrade på låg- och mellanstadiet men har försämrats på högstadiet. Stort missnöje råder i dag med elevernas räknefärdighet då de lämnar den obligatoriska skolan. Kunskapsbehållningen står inte i proportion till den tid och de ansträngningar som lagts ned.

Den viktigaste orsaken till att förloppet blivit det som skisserats ovan är att söka i samhällets utveckling. Skolan har gjort stora vinster socialt och mänskligt sett men det har skett på bekostnad av matematiken. Den uttalade satsningen på lågpresterande har delvis gått ut över andra grupper. Vidare har skolarbetet störts av de omfattande reformerna.

Utvecklingen av gymnasieskolans matematik

I linje med syftet med min undersökning koncentrerar jag mig på de matematiktunga linjerna. Den stora reformen skedde i och med Lgy 65 då det nya gymnasiet avlöste det gamla. Sedda ur matematikens synvinkel var de viktigaste konsekvenserna av denna reform

- förstärkt undervisning i statistik och sannolikhetslära
- mindre resurser åt matematikundervisningen
- förstärkning av naturvetarnas språkligt-humanistiska utbildning
- gemensam matematikkurs för naturvetare (N) och tekniker (T).

De kraftigaste praktiska återverkningarna för matematiken fick ändringarna i gymnasiets organisation, bl a:

- breddning av gymnasiet (den hade skett tidigare på 1960-talet)
- ändrat betygssystem och nya flyttningsregler
- slopande av studentexamen
- ändrade tillträdesregler till högre utbildning.

Kursinnehållet ändrades genom att en del nya moment infördes och andra togs bort. Med hänsyn till den korta undervisningstid som anslogs får kursinnehållet uppfattas som för stort.

Arbetsformerna påverkades framför allt genom den nya skrivningstypen och de mer heterogena klasserna. Den tysta räkningen ökade kraftigt i omfattning och uppgifterna blev enklare. Kunskapsresultaten blev sämre. Diagnostiska prov i matematik för nyantagna teknologer har visat på dålig räknefärdighet. Klagomålen från avnämare har varit legio.

Makthavarna

Den viktigaste maktfaktorn inom matematikundervisningen är traditionen och det förefaller svårt att åstadkomma större ändringar av matematikundervisningen. I försök att förstå matematikundervisningen är det intressant att göra klart för sig vilka intressentgrupper som haft det starkaste inflytandet på undervisningens utveckling i Sverige, dvs vilka som är de egentliga makthavarna. Jag har studerat tre grupper av makthavare: utbildningspolitiker, lärare och avnämare.

Utbildningspolitikernas inflytande har varit stort. De åstadkom hela skolans omdaning och de ändrade därvid kraftigt förutsättningarna för matematikundervisningen. De var för den nya matematiken. Den svenska skolan höll på att explodera inifrån och resultaten från matematikundervisningen blev allt sämre. Skulle en 9-årig eller 11-årig skolgång bli en realitet för alla svenskar gällde det att hitta metoder att lära alla matematik. Den nya matematiken föreföll erbjuda en sådan möjlighet. Genom att reducera krångliga och meningslösa uppgifter och i stället bygga på förståelse var den mycket tilltalande. Den var dessutom samhällstillvänd med sin betoning av statistik, tabeller, diagram och andra praktiska ting.

Det var inte bara i Sverige man resonerade så. Den nya matematiken var en i högsta grad internationell företeelse. Idéerna gick hand i hand med betonandet av utbildning som viktig ekonomisk faktor, med utbildningsteknologin och med det växande intresset för den kognitiva psykologin (Piaget), som allt ägde rum under 1960-talet.

Utbildningspolitikerna resonerade kanske som så att om den nya matematiken höll vad den lovade så var mycket vunnet. Om inte så hade man något att skylla ifrån sig på. Under alla omständigheter så minskade man möjligheterna att i efterhand jämföra den nya och den gamla skolan.

När det visade sig att den nya matematiken inte infriade förväntningarna skyllde också utbildningspolitikerna ifrån sig. På 1970-talet blev basfärdigheterna den nya frälsningsläran. Hur kraftigt denna rörelse kommer att påverka matematiken är i dag för tidigt att yttra sig om.

Matematikens roll som social vägskiljare tycks bestå - även om den förlorat mycket i status. Utbildningspolitiker har på senare år påtalat denna roll och finner det icke önskvärt att dela upp människor i bättre och sämre på det sätt som sker inom matematikundervisningen. Politikerna har säkert ännu inte sagt sitt sista ord i denna fråga.

Lärarna har inte varit pådrivare i reformarbetet i skolan. Reformen har kommit utifrån. Detta har varit mycket olyckligt för reformprocessen. Skolans organisation har ändrats men knappast det inre arbetet. Detta gäller också utvecklingen av skolmatematiken. På låg- och mellanstadiet gör lärarnas vanligen korta utbildning i matematik att de hellre ägnar sig åt andra skolämnen. På högstadiet och gymnasiet är lärarna fackkunnigare men ändå relativt litet utvecklingsinriktade. De var dock positiva till moderniseringen av stoffinnehållet.

Lärarorganisationerna protesterade milt på vissa punkter då reformerna beslutades men sade sedan ifrån desto skarpare när arbetet med den nya skolan pågått några år. Dels protesterade de genom skrivelser. Dels protesterade de genom sitt sätt att bedriva undervisningen. Mycket av det nya kom aldrig till genomförande. Ibland för att det inte gick. Ibland för att lärarna inte förstod hur de skulle göra eller för att de inte ville förstå. Genom positionen att vara den personalgrupp som genomförandet hänger på har lärarna en nyckelställning och blir därigenom som kollektiv de viktigaste makthavarna.

Bland avnämare till matematikundervisningen utgör lärare som tar emot elever för fortsatta studier den viktigaste maktgruppen. De har klagat mycket på den dåliga räknefärdigheten, vilket gjort starka intryck och därigenom påverkat matematikundervisningen på lägre stadier.

Jag har också analyserat mer begränsade grupper av potentiella makthavare och funnit att fortbildningskonsulenter och SO-personal är betydelsefulla; de förra för att de förmedlar och kanaliserar gräsrotskontakter, de senare genom att de arbetar med att genomföra de skolpolitiska besluten.

Lärarhögskolepersonalen inklusive forskarna har inte haft så stort inflytande bl a på grund av avsaknad av resurser. Läromedlen är viktiga men författarna är helt i händerna på lärarkollektivet genom att de av marknadskäl tvingas att tillfredsställa de breda gruppernas önskemål. Ett läromedel måste ha stor upplaga för att kunna utges och kan därför inte inrikta sig på minoritetsgrupper t ex av progressiva lärare trots att detta på sikt skulle hjälpa alla lärare. Lärarorganisationernas representanter har inte utnyttjat den maktställning de borde kunna ha med hänsyn till lärarnas viktiga roll.

Matematikutbildningen för teknologer och ingenjörer

Studium av den del av matematikutbildningen som äger rum på högskolan har utgjort ett viktigt inslag i min undersökning.

Det är självklart att i en ingenjörsutbildning som den maskintekniska måste ingå matematik. Det går emellertid inte att fastställa någon optimal matematikkurs. Därtill är sammanhanget mellan olika matematikmoment för komplext och prioriteringsgrunderna om ett moment verkligen behövs i de övriga ämnena för osäkra. Det finns alltså inga möjligheter att utifrån teoretiska utgångspunkter ange vilket stoffinnehållet i matematikkursen bör vara. Man är hänvisad till de empiriska erfarenheterna och de förmedlas framför allt av lärarna. Det finns all anledning att hysa respekt för denna empiriska process och dess resultat.

De enkäter som jag företagit med teknologer, lärare och yrkesverksamma ingenjörer har redovisats i "Sju enkäter". Dessa enkäter avsåg den maskintekniska utbildningen vid KTH. De har kompletterats med intervjuer och samtal med företrädare för olika intressentgrupper. Resultaten sammanfattas i det följande.

Stoffinnehållet

I "Sju enkäter" finns redovisat vilka matematikmoment som företrädare för andra ämnen och teknologer uppfattar som viktiga.

Ämnesföreträdarna tycker bl a att

- det är viktigare att kunna skol- än högskolematematiken
- det är viktigt att kunna genomföra logiska resonemang
- det räcker med ett relativt standardbetonat kunnande
- matematikens nuvarande omfattning är tillfredsställande.

Teknologerna är också ganska nöjda med matematikkursen. De menar att KTH-kursen egentligen medför att man lär sig skolkursen bättre och får viss orientering därutöver. De har inte behövt några matematikmoment som inte gåtts igenom i matematikkursen - snarare är det så att de andra ämnena utnyttjar "genant" lite matematik.

De yrkesverksamma är också nöjda med KTH-matematiken. Användningen av matematik är för de flesta rätt låg. Man önskar trots detta ingen differentiering av matematikutbildningen. Logisk förmåga tycker man är viktig.

Att tillämpa matematik

Ämnesföreträdarna har blygsamma krav på teknologernas tillämpningsförmåga. Det räcker om teknologerna kan arbeta efter förebilder. De behöver ej själva kunna välja den matematik det gäller. I den utsträckning teknologerna lär sig tillämpa matematik sker detta i de övriga grundläggande ämnena i lägre årskurser.

Teknologerna rapporterar att de ofta har svårigheter att tillämpa matematik. Å andra sidan är kraven från andra ämnen i detta hänseende inte särskilt accentuerade. Teknologerna efterlyser fler tillämpningsuppgifter under matematikundervisningen.

De yrkesverksamma önskar mer träning under högskoletiden i att tillämpa matematik.

Trots att matematik används så mycket i M-utbildningen förekommer knappast något klart målinriktat arbete på att lära teknologerna att tillämpa matematik. De lär sig använda den men inte att tillämpa den. Detta förhållande, jämte att många ämnen inte utnyttjar den matematik många teknologer lärt sig, uppfattar jag som en stor brist.

Är matematikundervisningen för teoretisk?

Som matematikundervisningen i dag bedrivs vid M-KTH kan den inte sägas vara särskilt teoretisk. De flesta matematiklärare har en pragmatisk inställning och tentamina är inte teoretiska med undantag av en särskild teoritentamen, som teknologerna dock tar avstånd ifrån. Skulle matematiken göras mindre teoretisk finns det risk att den mister sin generella användbarhet. Ämnesföreträdarna önskar inte denna konsekvens men vill ändå ha en matematikutbildning som inte tar mycket tid och inte är teoretisk eller omfattande men som ändå ger god tillämpningsförmåga. De får delvis uppfattas som motsägelsefulla och orealistiska i sina krav. Många yrkesverksamma försvarar en fristående, principiell matematikundervisning.

Uppgiftslösandet i matematik

Matematikinlärandet och kunskapskontrollen sker i hög grad genom uppgiftslösande. Detta förhållande accepteras i princip av de inblandade parterna. Hos de yrkesverksamma kan man spåra en viss tvekan. Med dem kan man ifrågasätta om man uppfyller målen med matematikutbildningen. Är inte matematikundervisningen väl torftig?

Är matematiken för svår?

Studieresultaten vid många linjer på de svenska tekniska högskolorna har på 1970-talet gett bekymmer. Det gäller bl a M-KTH. UKÄ tillsatte i början av 1970-talet två kommittéer, MATEK och RESULTATGRUPPEN.

Båda tog upp problematiken kring matematikundervisningen och studieresultaten. Det konstaterades att matematik uppfattades som ett svårt ämne men att skulden till de försämrade studieresultaten inte var orsakade av en dålig eller felaktigt upplagd matematikundervisning. Man lade skulden på gymnasieskolan och på den kraftigt ökade tillströmningen till högre tekniska studier. En studieavbrottsundersökning gav en hel del tips om orsaker till de försämrade studieresultaten. Matematiken uppfattades av många som det svåraste ämnet. Högskolorna satsade under 1970-talet extra medel på stödåtgärder av olika slag och därvid bl a på en förstärkt matematikundervisning men i huvudsak förändrades ej krav och inriktning.

Vid mina enkäter och intervjuer har matematiklärarna framfört att en orsak till teknologernas svårigheter är bristande förkunskaper och dålig fallenhet för ämnet. Företrädarna för övriga ämnen och teknologerna anser i allmänhet inte att matematiken ställer för höga krav utan menar att kraven är väl avvägda med hänsyn till behoven i övriga ämnen. Studierna i dessa ämnen kan ju göras effektivare om de kan bygga på en kvalificerad matematisk begreppsapparat. Vidare finns det skäl som talar för att tidigt i utbildningen ha ett matematikämne med höga krav så att teknologer, som inte mäktar den matematiska nivå de högre tekniska studierna kräver, kan sadla om på ett tidigt stadium.

Det förefaller som om matematikkraven vore lagom avvägda med hänsyn till utbildningsmålet.

Perspektiv inför 1980-talets skolmatematik

Den analys jag genomfört och som sammanfattats i det föregående ger lärdomar inför 1980-talet. Här är några av dem sammanfattade.

- Det är uppenbarligen svårt att åstadkomma större ändringar av matematikundervisningen.
- För att kunna genomföra en reform av matematikundervisningen måste lärarna ha förstått och accepterat syftet med reformen.
- Man bör hysa en stor respekt för den praxis enligt vilken matematikundervisning i dag bedrivs.
- Varje lärares personliga professionalism är viktig.
- Realistiska bedömningar måste göras angående vad matematikinlärande kräver i form av
  - tid
  - förkunskaper hos eleverna
  - förmåga hos eleverna
  - intresse och motivation hos eleverna.
- Det krävs en precisering av vilket målet är för skolmatematiken och en allmän uppslutning bakom detta.
- Skolans omgestaltning leder till en förändring av arbetsformerna i matematik, vars konsekvenser måste beaktas.

- Genom en undervisning som i icke ringa utsträckning replierar på skruvinlärande bör alla elever i grundskolan kunna tillägna sig brukskunskaper i matematik.

- Varje elev bör i varje skolform få försöka tillägna sig vissa initiativkunskaper i matematik.

Det har sitt intresse att belysa utvecklingen i USA för att ta lärdomar därifrån. Följande fakta förtjänar att uppmärksammas.

- Endast en mindre del av det som lanserades i samband med reformvågen i matematik på 1960-talet har realiserats i klassrummen. Situationen är dock svåröverblickbar.

- Matematikundervisningen har successivt förbättrats i USA. Bl a har laborativa arbetssätt och självinstruerande material börjat användas mer. Tillämpningar har fått större betydelse.

- Räknefärdigheten har successivt försämrats sedan 1960-talet.

- I dag är huvudfrågorna de lågpresterande, minimikrav på matematik i samhället, de nya tekniska hjälpmedlen (dosor, datorer) och tillämpningarnas roll.

- Oklarhet råder om hur lärarutbildning och lärarfortbildning ska läggas upp. Särskilt den senare har varit otillräcklig.

- Det finns bedömare som menar att orsaken till att reformer av skolan förfelas är bristande kännedom om skolans kultur, som är ytterst komplex.

Jag ger ett förslag till alternativ organisation av skolmatematiken.

Skolåret indelas i fyra perioder. Under varje period studeras ett sammanhängande stoffområde. Detta kan antingen avse basfärdigheter eller vara matematiskt, intresse- eller yrkesinriktat. Lämpligen utarbetas läromedel i form av små häften för varje period. Ju längre upp eleven kommer i skolan ju mer ökar valmöjligheterna. I den fjärde perioden varje år läses inga basfärdighetsområden. Den ägnas åt uppföljning. Elever, som lyckats mindre väl inom något basfärdighetsområde, repeterar så att de får acceptabla kunskaper. De hinner då i stället kanske inte arbeta igenom ett helt nytt stoffområde. Den fjärde perioden utnyttjas också av elever att läsa in matematiska eller yrkesområden de tidigare "missat".

På högstadiet finns sex kvalificerat matematiska stoffområden, som väljs av elever med stort behov av matematik i sin fortsatta utbildning. De kan också läsas under de inledande åren i gymnasieskolan.

Några betyg behövs inte med denna organisation. Genom konstruktionen med den fjärde perioden som repetitionsperiod har skolan gjort vad den kunnat för att främja basfärdigheterna. De elever, som med godkänt resultat läst ett matematiskt kvalificerat område, får detta intygat i sitt avgångsdokument såsom i dag sker med tillvalsämne.

Den högre tekniska utbildningen i morgon

Den analys av dels de allmänna villkoren för matematikundervisningen dels den nuvarande matematikundervisningen för teknologer och ingenjörer, som har sammanfattats i det föregående på sid 17 - 19, utgör underlag till 15 PRINCIPER som jag formulerat inför 1980-talet. Dessa PRINCIPER utgör inte något heltäckande program utan inskränker sig till att ta upp vissa fundamentala spörsmål.

Det finns ytterligare bakgrundsmaterial som jag stött mig på. Det gäller bl a uttalanden från en OECD-konferens om den matematiska utbildningen av ingenjörer, där man understryker behovet av motivation inför matematikstudiet och talar för kompromisser om matematikkursens omfattning. Från Loughborough i England kommer förslag om "an integrated approach", där olika matematiska metoder kombineras, miniprojekt föreslås och det talas för en förändrad och mer aktiv lärarroll.

De 15 PRINCIPER som formuleras är:

PRINCIP 1. Urvalet av moment att ingå i matematikkursen på en utbildningslinje bör ske i huvudsak utifrån behoven i resten av utbildningen.

PRINCIP 2. De övriga ämnena i utbildningen analyseras avseende matematikbehov. De matematiska moment som bedöms som oundgängligen nödvändiga fastställs. Det "matematiskt-pedagogiska" höljet till dessa moment undervisas, dvs den matematikkurs som behöver studeras för att klara dessa moment.

PRINCIP 3. Matematikkursen bör marknadsföras så väl att bl a alla lärare i andra ämnen vet vad den innehåller och vilken dess målsättning är.

PRINCIP 4. Under matematikundervisningen bör de moment från de matematikanvändande ämnena, som motiverat att de olika matematikmomenten medtagits, utnyttjas för att motivera teknologerna för matematikstudiet.

PRINCIP 5. Teknologerna bör arbeta i väl sammanhållna grupper. Varje grupp bör redan från början av sina studier ha någon eller några större uppgifter - miniprojekt - som de arbetar med under en längre tid och som innebär tillämpning av matematik.

PRINCIP 6. Matematiklärarna bör ha en aktiv roll. Varje nytt år bör innebära något nytt, varvid läraren tillsammans med teknologgruppen ger matematikundervisningen det årets speciella profil genom att man ägnar särskild uppmärksamhet åt något område. Tillsammans bör de uppleva matematiken som en levande vetenskap att anpassa efter just deras behov och intresse.

PRINCIP 7. En nära samverkan mellan undervisningen i matematik och i andra ämnen bör etableras.

PRINCIP 8. Lärare i ämnen som använder matematik bör involveras mer i matematikundervisningen, t ex som utbyteslärare och som tillfälliga lärare i miniprojekten.

PRINCIP 9. Undervisningen i matematik, programmering och numeriska metoder bör nära samordnas och delvis integreras.

PRINCIP 10. På flertalet utbildningslinjer bör teknologerna få en självständig kompetens i sådan matematik, som de kan tillämpa i tekniska sammanhang.

PRINCIP 11 (lagom-principen). Abstraktionsgraden av matematikundervisningen bör vara noga avvägd och anpassad till elevgruppens behov.

PRINCIP 12. Man bör sträva efter att hitta former för kunskapskontrollen, som är förenliga med målet för matematikundervisningen.

PRINCIP 13. Matematikundervisningen bör ta fasta på den yrkesverksamme ingenjörens behov av kunskaper i överslagsräkning och av logisk förmåga.

PRINCIP 14. Teknologerna bör redan från början utsättas för ett matematikprogram, som får dem att arbeta effektivt. Inledningsvis är det viktigast att befästa gymnasiekunskaperna och lära sig tillämpa dem i andra ämnen.

PRINCIP 15. Matematikundervisningen differentieras tidigt genom extra kurser, som vissa teknologer förbigår eller läser senare under studiegången.

Jag hyser en försiktig optimism inför framtiden. Stora ändringar torde vara svåra att uppnå men genom att se realistiskt på situationen och acceptera att matematikinlärande kräver tid, att många elever ej kan arbeta särskilt teoretiskt-systematiskt, att man måste kunna mycket matematik för att kunna tillämpa den samt att en ny mer aktiv lärarroll behövs, vore mycket vunnet.

Vad är nyttan med undersökningen?

- Den utgör ett dokument från svensk matematikundervisning på mitten av 1970-talet som den upplevdes av dem som stod mitt uppe i den.
- Den kan utnyttjas som en historiebeskrivning av vad som hände i samband med den nya matematiken.
- Något av de teorifragment som finns kan kanske skärpas och bli en pusselbit när bilden av undervisning som fenomen börjar få sin definitiva form.
- Den illustrerar de svårigheter som den ämnesmetodiska forskningen hade på 1970-talet.
- Planerarna av 1980-talets matematikundervisning kan ta fasta på en eller flera av de idéer som jag framför.

1 MATEMATIKUNDERVISNINGENS VILLKOR

1.1 Några modellfragment

Kapitel 1 innehåller en diskussion under mycket allmänna villkor av problem förknippade med matematikundervisning och matematikinlärande. I den första delen ges några makromodeller för matematikinlärande. Det gäller en indelning av målet i delmål, införandet av begreppen bruks- och initiativkunskaper, primär- och sekundärkunskaper, spik- och skruvinlärande samt potential hos en matematikutbildning. Dessa modeller används sedan som underlag vid beskrivning av svensk matematikundervisning i kapitel 2 och vid de förslag som ges inför 1980-talet i kapitel 3. Man kan också se det som att avsnitt 1.1 ger en terminologi för de senare avsnitten.

1.1.1 MÅL FÖR MATEMATIKUNDERVISNING

Det övergripande målet

I många sammanhang har målfrågor för matematikundervisningen diskuterats och otaliga målformuleringar existerar. Det är emellertid svårt att få någon enhetlig bild över de olika uppfattningarna om varför vi undervisar i matematik. De varierar starkt från individ till individ och från land till land.

Målfrågorna utgjorde ett av huvudtemana vid den tredje stora kongressen för matematikundervisning i Karlsruhe 1976. Jag deltog själv i den panel som diskuterade frågan. I ett bakgrundsdokument (d'Ambrosio, 1976) citeras en målformulering från Krulik och Weise.

"Goal 1: To achieve for each individual mathematical competence appropriate for him.

Goal 2: To prepare each individual for adult life, recognizing that some students will require more mathematical instruction than others.

Goal 3: To foster an appreciation of the fundamental usefulness of mathematics in our society, particularly with reference to understanding and improving man's environment.

Goal 4: To develop proficiency in using mathematical models to solve problems."

Det är mycket att diskutera om den konkreta innebörden i dessa formuleringar och om deras relationer till målsättningen för utbildning i allmänhet. Debatten under kongressen utgjorde en klar illustration av detta. I målsättningsdiskussioner angående matematik kan man särskilja två huvudaspekter dels en nytto-aspekt dels en "kulturell-värde"-aspekt. Enligt den förra studerar man matematik för att ha nytta av den vid fortsatt utbildning och i yrkes- och vardagsliv. Enligt den senare sker det för att matematikstudiet utvecklar individen och för att man blir delaktig i den kulturvärld som matematiken representerar. I bakgrundsdokumentet diskuterar d'Ambrosio (1976) möjligheten att förena dessa aspekter:

> "..... we will propose some strategies which allow for parallel running of the two apparently conflicting objectives for mathematical education, the one based on the concept of mathematics as a utilitarian body of skills and techniques, designed and taught to satisfy social needs, and the other looking into mathematics as a component of the large body of models of thought and languages which simulate external phenomena."

Det får sägas vara oklart i vilken grad dessa två målaspekter kan förverkligas samtidigt.

I det stora översiktsverket "Mathematics as an Educational Task" diskuterar Freudenthal (1973) målfrågor i ett kapitel "Use and Time of Mathematics Instruction". Han inleder med att säga att

> "The use and aim of mathematics instruction have been discussed so long, from so many standpoints and by so many people that there is little reasonable left to say on this theme. To demonstrate this, indeed, is the purpose of this chapter."

Han fortsätter:

> "There is no way of telling positively what the aim of mathematical instruction is. All of us understand that mathematics admits of numerous applications and that more pupils than ever will have to apply mathematics. We would be fortunate if we could tell of each of them which mathematical concepts and techniques he would need in the future. It is not as simple, on the contrary we are sure it is just the opposite: mathematics is so flexible that neither individually nor collectively can we give sharper contours to a bunch of generalities as regards its application and applicability."

Han påpekar att majoriteten av dem som studerar matematik upp till den grundläggande postgymnasiala utbildningen ej ska bli matematiker och att matematikundervisningens mål måste fastställas utifrån denna utgångspunkt.

Freudenthal tar också upp frågan om inte i praktiken ett mål för matematiken har varit att tjänstgöra som urvalsinstrument. Var man duktig i matematik var detta ett tecken på allmän duglighet.

Det här anförda angående det övergripande målet för matematikundervisningen har medtagits för att visa den oenighet som råder om målet. Innan jag lämnar denna fråga ska jag bara konstatera att de flesta svenska företrädare har haft en mycket pragmatisk syn på matematikundervisningens mål. Enligt denna syn är målet att ge de matematikkunskaper som behövs för

- fortsatt utbildning (både i och utom matematik)
- yrkesverksamhet
- vardags- och privatliv.

I det sista delmålet kan eventuellt den kulturella och individutvecklande aspekten inrymmas.

Taxonomier

I samband med måldiskussioner tilldrar sig försöken att uppställa taxonomier ett särskilt intresse. Man strävar därvid efter att ange s k "behavioral objectives" ordnade hierarkiskt. Det senare innebär att delmålen kan ordnas så att de successivt omfattar alltmer kvalificerat kunnande. Om man nått ett delmål har man automatiskt nått de föregående. Ofta faller sådana försök till uppdelning i delmål tillbaka på den av Bloom (1964) med medhjälpare utarbetade taxonomin. I denna finns följande kategorier.

1 Kunskap

2 Förståelse

3 Tillämpning

4 Analys

5 Syntes

6 Värdering

Det har visat sig svårt att använda denna taxonomi på matematikinlärande och detta av flera skäl.

- Det är ganska olika typer av kunnande som krävs när det å ena sidan gäller ren matematik och å andra sidan tillämpning av matematiken. Att uppställa en taxonomi som avser bådadera är därför svårt. De enklaste formerna av tillämpning kan inte anses särskilt kvalificerade medan andra kräver mycket djupgående matematiska kunskaper.

- Det är svårt att placera in "räknefärdighet", dvs förmåga att utföra numeriska och algebraiska beräkningar. Denna färdighet kan endast delvis inordnas i den lägsta nivån av "kunskap", eftersom det i många fall krävs både förståelse och tillämpningsförmåga.

- Detsamma gäller problemlösningen, som är ett dominerande inslag i matematikundervisningen. Till vilken nivå ska den räknas? Den förekommer i många olika skepnader, en del nästan triviala och andra mycket avancerade.

Flera försök har gjorts att modifiera Blooms taxonomi. R Wood (1968) använde följande uppdelning i ett amerikanskt "Item banking" projekt.

1 Knowledge and information: recall of definitions, notations, concepts

2 Techniques and skill: computation, manipulation of symbols

3 Comprehension: capacity to understand problems, to translate symbolic forms, to follow and extend reasoning

4 Application: of appropriate concepts in unfamiliar mathematical situations

5 Inventiveness: reasoning creatively in mathematics

Denna taxonomi har visat sig fungera i praktisk användning vid uppgiftskonstruktion. Den undviker svårigheter med de utommatematiska tillämpningarna genom att enbart avse ren matematik. Jag saknar vidare en nivå för det kvalificerade matematiska kunnandet, som innebär att man trängt in i och behärskar en rad viktiga matematiska metoder som man sedan använder vid problemlösning och tillämpning.

I den stora jämförande internationella matematikundersökningen (Husén, 1967) användes följande uppdelning vid uppgiftsanalysen i USA.

1 Ability to remember or recall definitions, notations, operations and concepts

2 Ability to manipulate and compute rapidly and accurately

3 Ability to interpret symbolic data

4 Ability to put data into symbols

5 Ability to follow proofs

6 Ability to construct proofs

7 Ability to apply concepts to mathematical problems

8 Ability to apply concepts to non-mathematical problems

9 Ability to analyze (problems) and determine the operations which may be applied

10 Ability to invent mathematical generalizations

Följande nivåer användes sedan vid den slutliga framtagningen av uppgifterna som ingick i det internationella testet.

1 Knowledge and information: definitions, notations, concepts

2 Techniques and skills: solutions

3 Translation of data into symbols or schema or vice versa

4 Comprehension: capacity to analyze problems, to follow reasoning

5 Inventiveness: reasoning creatively in mathematics

Ett kännetecken på denna uppdelning är den stora vikt som läggs vid själva symboliseringen, dvs övergången från en typ av abstraktion till en annan.

I USA använde "Committee on Assessing the Progress in Education" (1969) följande kategorisering.

1 Recall and/or recognize definitions, facts and symbols

2 Perform mathematical manipulations

3 Understand mathematical concepts and processes

4 Solve mathematical problems - social, technical and academic

5 Use mathematics and mathematical reasoning to analyze problem situations, define problems, formulate hypotheses, make decisions and verify results

6 Appreciate and use mathematics

Slutligen ska nämnas en uppdelning som använts inom "The National Longitudinal Study of Mathematical Abilities" i USA (Begle, 1970). Man indelade matematikuppgifterna i tre områden: "Talsystem", "Geometri" och "Algebra". Varje uppgift hänfördes till följande nivåer som är hierarkiskt ordnade.

1 Computation-Items designed to require straightforward manipulation of problem elements according to rules which the students probably have learned. Emphasis is upon performing operations and not upon deciding which operations are appropriate.

2 Comprehension-Items designed to require either recall of concepts and generalizations,or transformation of problem elements from one mode to another. Emphasis is upon demonstrating understanding of concepts and their relationships and not upon using concepts to produce a solution.

3 Application-Items designed to require (a) recall of relevant knowledge, (b) selection of appropriate operations, and (c) performance of the operations. Items are of a routine nature. They require the student to use concepts in a specific context and in a way he has presumably practiced.

4 Analysis-Items designed to require a non-routine application of concepts. The items may require the detection of relationships, the finding of patterns, and the organization and use of concepts and operations in a non-practiced context.

Mitt förslag till delmålsuppdelning

För mitt studium har jag gjort en uppdelning i delmål av matematikkunnandet. Den är en kombination och variation av de uppdelningar som diskuterats ovan.

Delmålen är

A Begreppsförståelse

B Räknefärdighet

C Metodkännedom

D Problemlösningsförmåga

E Tillämpningsförmåga

Jag ska i det följande precisera vad jag avser med de olika delmålen. Först emellertid en diskussion om de fem delmålen är hierarkiska. Självklart finns det inom varje delmål kunnande av mer eller mindre kvalificerat slag. Exempelvis finns det inom A begreppsförståelse för mycket kvalificerade begrepp samtidigt som det i B ingår mer elementär räknefärdighet som inte förutsätter dessa kvalificerade begrepp ur A. Det finns många exempel på elever som genom ihärdigt övande lyckats tillägna sig en förhållandevis god räknefärdighet byggd på en mycket minimal begreppsförståelse.

Man kan indela de fem delmålen i t ex 5 nivåer (0 - 4). Genom en sådan nivåuppdelning kan man införa en partiell ordning. (En partiell ordning är ett matematiskt begrepp och avser en relation som är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv. Elementen behöver inte nödvändigtvis kunna ordnas i en följd.) Nivå 4 i något delmål förutsätter sålunda nivå 0 - 3 i alla delmål. Nivå 3 förutsätter på samma sätt nivå 0 - 2 i alla delmål. Detsamma gäller nivå 2 och 1. Däremot är ej samma nivå i de fem delmålen ordnade. De kan sägas förutsätta varandra eller annorlunda uttryckt: man kan ej ha nått denna nivå inom ett delmål om man ej gjort det inom de andra fyra delmålen. Detta förefaller att tala mot den gängse uppfattningen att matematikinlärandet är hierarkiskt, dvs att momenten och färdigheterna kommer i en viss given ordning och man kan inte klara ett "senare" moment eller tillägna sig en färdighet innan man klarat av respektive tillägnat sig de föregående.

En sådan hierarki finns naturligtvis. Den förorsakar svårigheter för den studerande eftersom luckor i det föregående kan omöjliggöra det fortsatta inlärandet. Men parallellt med denna svårighet finns något som ofta vållar större problem för den studerande nämligen att "allt hänger ihop", att det är svårt att "börja någonstans", att det är svårt att "komma in i" tankegångarna och begreppen. Detta hänger samman med det nyss diskuterade förhållandet att man måste tillägna sig en viss nivå i alla delmålen på en gång. Låt mig ge två exempel som illustrerar vad jag avser.

Ta först ett moment från den allra första delen av matematikstudiet nämligen addition inom talområdet 0 - 100 i årskurs 1 på lågstadiet i grundskolan. Det gäller att på en gång tillägna sig följande avseende varje delmål.

A. Begreppsförståelse

Eleven måste bl a ha klart för sig distinktionen mellan mängden och antalet element i mängden. Vid addition handlar det om antalen.

B. Räknefärdighet

Eleven ska kunna ange summan av två ensiffriga tal och kunna ställa upp algoritmer. För att kunna lära sig summorna fordras bl a att eleven kan förankra uppgifterna vid konkret material.

C. Metodkännedom

Eleven måste veta att den matematiska metoden att beräkna antalet i en union av disjunkta mängder är addition och känna till algoritmuppställningen som en metod att beräkna summor. Eleven förstår denna metod under hand genom att använda den. För att kunna använda den praktiskt behöver han/hon kunna ange summan av två ensiffriga tal.

D. Problemlösningsförmåga

Med problemlösning avser jag att ställas inför en situation som är ny och okänd i åtminstone någon bemärkelse.

Exempel på problem är att ange vilket tal som ska stå i rutan i

$$3 + \square = 10.$$

Ett annat är att beräkna 3 + 8 innan eleven lärt sig resultatet utantill. Eleven kan då komma på att han/hon kan ta fram först 3 föremål och sedan 8 föremål, föra samman dem och räkna antalet.

För att lösa sådana problem krävs begreppsförståelse, räknefärdighet och kännedom om additionen som metod. Omvänt så behövs problemlösningen för att bygga upp begreppsförestående, räknefärdigheten och metodkännedomen. Genom att eleven försöker lösa problem funderar han/hon kring begreppen som sådana och testar metoden. Detta fördjupar förståelsen och förstärker räknefärdigheten.

E. Tillämpningsförmåga

Eleven ska kunna använda sina kunskaper om addition i praktiska situationer: han vill ha 3 pannbiffar och pappa 4. Hur många ska han steka? Självklart krävs de fyra övriga delmålen för att klara detta och omvänt är förmågan till en sådan konkret förankring av addition som det innebär att använda den i praktiska situationer nödvändig för kunnandet.

Det andra exemplet är derivata i gymnasieskolan.

A. Begreppsförståelse

Eleven bör ha klart för sig att derivata avser ett gränsvärde, dess geometriska innebörd och dess roll att mäta förändringshastighet. Denna förståelse byggs upp genom att begreppet används och tillämpas.

B. Räknefärdighet

Eleven bör kunna beräkna derivatan till olika typer av funktioner. Det lär man sig bäst genom god begreppsförståelse. Att kunna beräkna derivator fordras för att man ska kunna använda begreppet.

C. Metodkännedom

Med hjälp av derivator kan man studera t ex hastighets- och accelerationsfenomen. Derivation som matematisk metod är mycket viktig. Att lära sig en sådan metod stärker förståelse och räknefärdighet samtidigt som den kräver dem.

D. Problemlösningsförmåga

Att lära sig använda derivatan i det mångfald av matematiska sammanhang där den kan utnyttjas innebär ofta problemlösning. Detta arbete förutsätter och stärker delmålen A, B och C.

E. Tillämpningsförmåga

Ett praktiskt optimeringsproblem kan ibland lösas genom att man ställer upp en funktion, som man bestämmer maximum av genom derivering. Ett sådant arbete kräver delmålen A, B, C och D men det är samtidigt ytterst betydelsefullt för att befästa dem.

Genom dessa två exempel har jag velat konkret illustrera hur sammankedjade delmålen är, samtidigt som de klart kan särskiljas. Delmålen utgör en cirkel. Man måste arbeta med att nå alla delmål i stort sett samtidigt. En av svårigheterna är att få en tillräcklig bas för sitt arbete så att inlärandet blir effektivt. Det gäller att komma tillräckligt långt på ett delmål så att det ger hjälp att nå övriga.

Precisering av delmålen

A. Begreppsförståelse

Det finns många olika typer av begrepp som avses såsom antal, mängd, heltal, decimaltal, triangel, bråk, potens, logaritm, derivata, differentialekvation. Förståelsen kan ligga på olika nivåer, från en mycket primitiv nivå, då eleven endast uppfattar begreppet isolerat och bara kan använda det i enkla beräkningar till en avancerad nivå då eleven förstått begreppets relationer till många andra begrepp.

B. Räknefärdighet

Det kan gälla räkning inom olika talområden, bokstavsräkning, ekvationslösning, hantering av vinklar och trigonometriska uttryck, räkning med logaritmer och potenser, derivering och integrering av elementära funktioner osv. Endast rutinbetonade färdigheter avses. Elever behöver inte "komma på något" utan ska endast använda tidigare inlärda förfaranden.

C. Metodkännedom

I matematiken lär man sig en rad metoder, t ex:

- divisionsalgoritm
- addition av oliknämniga bråk
- användning av logaritmer vid numerisk räkning
- derivering för att bestämma maximum och minimum
- algebraiska lösningsmetoder för differentialekvationer.

Eleven ska alltså ha tillägnat sig ett visst tillvägagångssätt, som han/hon kan använda i standardsituationer.

D. Problemlösningsförmåga

Här avses förmågan att lösa ett (inom-) matematiskt problem då eleven ställs inför en situation som i något icke-trivialt hänseende är ny för honom/henne.

E. Tillämpningsförmåga

Det gäller här kontakten mellan matematiken och verkligheten. Den förmåga som avses är att välja matematisk modell för att studera en viss praktisk situation, välja data för modellen samt tolka resultaten från modellen. Till mer avancerad förmåga inom detta delmål hör analyser av avvikelser mellan modellresultat och verklighet, skapandet av egna principiellt nya modeller samt en bedömning av en modells kvalitet. De tre sistnämnda färdigheterna hör nära samman med "analys", "syntes" och "värdering" i Blooms taxonomi.

1.1.2 BRUKS- OCH INITIATIVKUNSKAPER

För analysen av matematikundervisningen vill jag göra en distinktion mellan två typer av kunskaper, i fortsättningen kallade bruks- och initiativkunskaper. De särskiljs genom det sätt på vilket kunskaperna används.

Med brukskunskap avser jag ett kunnande färdigt att användas. Det behöver inte vidareutvecklas eller tillämpas. Man har lärt sig precis det man behöver kunna och exakt i den form det behövs.

Initiativkunskap innebär i motsats härtill en sorts kunskapsberedskap. Man har blivit i stånd att ta initiativ och tillämpa sitt kunnande på ett nyanserat sätt. Inom matematiken kan det t ex innebära att ställa upp egna problem, att lösa problem med icke-standardmetoder, att systematiskt utreda olika alternativ i en situation som inte i sig är matematisk, att sätta samman matematik från olika discipliner.

Brukskunskaper avser i huvudsak delmålen räknefärdighet, metodkännedom och den elementära begreppsförståelsen.

Initiativkunskaper har mer att göra med problemlösnings- och tillämpningsförmåga samt den avancerade begreppsförståelsen. Den sistnämnda kommer in i bilden därför att det fordras en ingående förståelse för ett begrepp för att kunna utnyttja det i nya situationer.

I visst hänseende avser initiativkunskaper högre steg i Blooms hierarki: tillämpning, analys, syntes och värdering.

Det är inte så att man kan sätta likhetstecken mellan brukskunskaper och baskunskaper. Det är sättet som kunskaperna används på, som skiljer brukskunskaper från baskunskaper. Brukskunskaper kan vara mycket avancerade och avse komplicerad matematik. Å andra sidan kan initiativkunskaper avse mycket grundläggande matematik. Redan på grundskolans lågstadium kan man tala om initiativkunskaper. En elev kan utföra alla additioner han eller hon ställs inför man skulle aldrig komma på tanken att i sitt vardagsliv tillämpa denna kunskap för att lösa ett problem. En sådan elev saknar initiativkunskap.

I grundskolan är dock brukskunskaperna det dominerande målet.

För sitt vardagsliv behöver varje individ viss matematik. Annars vore han/hon allvarligt handikappad. Det innebär också en väldig knäck för självkänslan att inte ha basfärdigheter i matematik. Dessa basfärdigheter består nästan enbart av brukskunskaper. Man ska kunna klara matematik som tränger sig på en: Vad kostar tillsammans två saker för 7 kr och 25 kr? Hur mycket är klockan en kvart efter 9.50? Om hyran ökar med 10 % vad blir den då? Däremot ingår knappast i basfärdighetskraven att själv ta matematiska initiativ, dvs ha ett mer aktivt matematiskt kunnande: Att planera en budget, att uppskatta chansen att vinna på tips, att diskutera alternativa lönehöjningsmodeller. Då fordras i allmänhet initiativkunskaper.

Det är mycket svårare att utbilda individer till initiativkunskaper än till brukskunskaper. Det är t ex betydligt svårare att avgöra om en person har en initiativkunskap än en brukskunskap. I det sistnämnda fallet ger man bara ett test. Har personen brukskunskapen, som ju alltid ska vara parat att använda, klarar han/hon testet. Det är svårare att testa om en person kan ta matematiska initiativ. Ta t ex en typisk initiativkunskap, nämligen problemlösningsförmåga. En sådan testas lämpligen genom att eleven ställs inför en problemsituation, som är ny för honom/henne. Men hur vet man att den verkligen är ny? Kanske har eleven mött den förut. Kanske har eleven specialtränat på just den problemtyp det gäller. En sådan specialträning på utvalda problemtyper är en inlärningsform som knappast leder till initiativkunskaper. Å andra sidan är skillnaden liten mellan denna inlärningsform och att skaffa sig problemlösningsförmåga genom att arbeta med problem av olika typer. Det är lätt att problemlösning degenererar till uppgiftsexercis och därmed inte leder till initiativkunskaper.

Det är också ofta svårt att avgöra om en elev har uppnått en mer avancerad begreppsförståelse, som vanligtvis är ett initiativkunnande. En elev har arbetat länge, mycket länge, med en kurs. På provet har han/hon klarat de uppgifter som behövs. I grund och botten har han/hon inte tillägnat sig de begrepp det är fråga om utan endast vant sig vid uppgiftstypen. Han/hon har drivit detta så långt att det inte går att särskilja denna tillvänjning från förståelse. Återigen är det testets otillräcklighet som spökar.

Existensen av inlärningsvägar, som leder till ett skenbart kunnande eller som har affektiva avigsidor, gör initiativkunskaperna förrädiska som mål. Säg att en viss initiativkunskap är mycket angelägen och eftersträvansvärd. Man är beredd att satsa mycket på att eleverna tillägnar sig den. En sådan satsning kan då bli en bumerang. Man tycker att eleverna tillägnat sig den men det har de inte i grund och botten. Ett indicium på att man förfelat målet är att utbildningen tagit för lång tid eller inneburit för stor uppoffring för eleverna. Resonemanget hänger nära samman med de teorier som framförts på senare år att man inte kan göra en resultatvärdering utan att ta hänsyn till den process som lett till resultatet.

För att man ska kunna utnyttja en initiativkunskap fordras en aktiv viljeakt. Det finns med andra ord en viktig affektiv komponent inblandad. Den positiva inställning som fordras måste man i allmänhet få under själva inlärningsprocessen. Annars är det antagligen för sent. Detta ställer större krav på inlärningsprocessen.

Överhuvudtaget finns det flera anledningar till att skilja på om målet är initiativ- eller brukskunskap. Det påverkar kraftivt val av undervisningstyp och den tid som krävs. Jag återkommer till denna fråga i avsnitten 3.1 och 3.2.

1.1.3 PRIMÄR- OCH SEKUNDÄRKUNSKAPER

I detta avsnitt ska jag diskutera relationen mellan en kunskap som en person besitter och personens egen bedömning hur säker denna kunskap är. Jag inför bl a begreppen primärkunskap och sekundärkunskap.

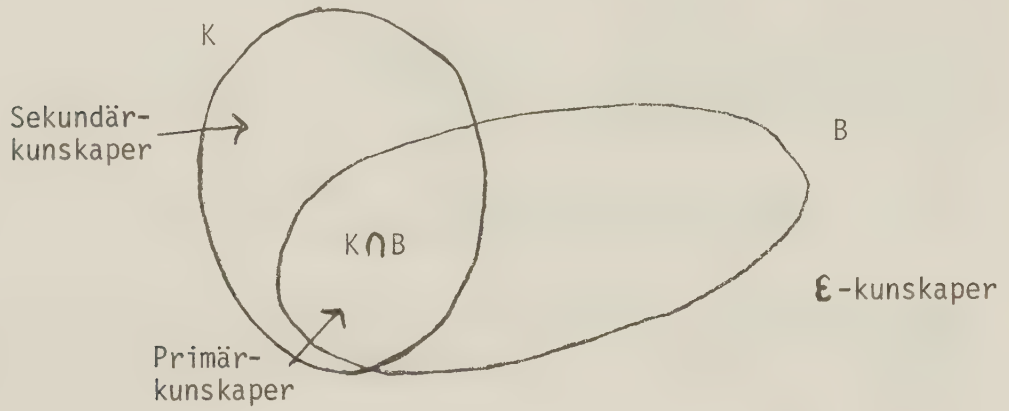
I det följande utgår jag från ett kunskapsområde av något slag. Jag inskränker mig till kognitivt kunnande. Däremot är det inte väsentligt att uppehålla någon skarp distinktion mellan kunskaper och färdigheter. Exempel på kunskapsområden är matematik, någon disciplin eller något moment inom matematiken, ett av de fem delmål för matematiken som jag diskuterat i det föregående eller för övrigt något område utanför matematiken.

Jag önskar nu komma fram till någon metod att karakterisera en persons kunskaper inom ett kunskapsområde. Jag tänker mig då en bedömare - lärare, examinator osv - som formulerar en rad uppgifter som testar personens kunskaper inom området. Dessa uppgifter kan vara fakta- och förståelsefrågor, räkneuppgifter, problem att lösa, analys- eller syntesuppgifter m m. Uppgifterna förutsätts relevanta, dvs för att en elev ska anses behärska kunskapsområdet ska han/hon kunna klara uppgiften och omvänt om en elev ej klarar en uppgift visar detta en kunskapsbrist. Validiteten hos uppgifterna är en förutsättning för mitt resonemang. Från reliabilitetsproblem bortses i detta sammanhang.

När en elev ställs inför en uppgift kan flera olika fall inträda:

- Eleven besvarar inte alls uppgiften. Eleven sägs då visa 0-kunskap.
- Eleven svarar fel på uppgiften. Eleven visar då ε-kunskap (ε = epsilon). Jag vill med beteckningen - inom matematiken används vanligtvis ε för att beteckna ett litet tal - antyda att det fordras ett visst minimimått av kunskaper för att överhuvudtaget kunna angripa uppgiften så att man kan komma fram till något slags resultat.
- Eleven svarar rätt på uppgiften. Däremot är eleven osäker på om han/hon löst uppgiften riktigt eller ej. Eleven sägs då visa en sekundärkunskap.
- Eleven svarar rätt på uppgiften och är säker på (övertygad om) att uppgiften är riktigt utförd. Eleven sägs då visa en primärkunskap.

Med ett mängddiagram kan förhållandena illustreras. Kalla mängden av kunskaper som en person har för K och mängden av kunskaper som han tror att han har för B.



Snittet $K \cap B$ utgör primärkunskaperna.

Differensmängden $K \setminus B$ utgör sekundärkunskaperna.

Differensmängden $B \setminus K$ består av ε-kunskaper. Det kan naturligtvis också finnas vissa ε-kunskaper utanför B.

Fel på grund av slarv och förbiseende

Ibland beror ett fel som en elev gör på slarv eller förbiseende, t ex på grund av tidspress. Det är långt ifrån självklart hur sådana fel ska bedömas och det är dessutom ofta svårt att klassificera ett fel som ett "slarvfel". Vi bortser för ett ögonblick från uppgifter som ges inom en utbildning för att avgöra om en elev har en viss kunskap eller ej och tänker oss uppgifter som en person ställs inför i sitt yrke eller i sitt privatliv. Att lösa den uppgiften fel på grund av slarv kan leda till lika förödande resultat som om man löser den fel på grund av bristande kunskaper. Det är alltså en mycket angelägen uppgift för skolan och övriga utbildningar att försöka eliminera slarvfelen. Det kan göras på många sätt, framför allt genom att ge eleverna bättre kunskaper men också genom att beivra slarvfel och inte betrakta slarvfel som "bagateller" som mycket litet inverkar på en totalbedömning av resultaten.

Såsom framgått av definitionen av primärkunskap fäster jag stor vikt vid elevens egen bedömning av om han/hon löst uppgiften rätt. Jag ska nu diskutera slarvfelens roll i detta hänseende och gör därför följande matrisschema.

Resultat \ Bedömning	Eleven tror att uppgiften är fellöst	Eleven är osäker	Eleven är säker på att uppgiften är rätt
Fel löst men ej genom slarv	1 Eleven är på rätt väg	2 ε-kunskap	3 Långt kvar till kunskap
Fel löst genom slarv	4 Svårbedömt	5 Svårbedömt	6 ε-kunskap eller sekundärkunskap
Rätt löst	7 ε-kunskap	8 Sekundär-kunskap	9 Primärkunskap

Talen nedan hänför sig till respektive ruta.

1 Det kan uppfattas som ett gott tecken att eleven inser att han/hon gjort fel. Ett sådant resultat är uppmuntrande i en formativ evaluering men inte i en summativ.

2 Ett typiskt fall av ε-kunskap.

3 Detta fall är alarmerande. I yrkes- och vardagsliv är sådana personer många gånger farliga. De kräver fortsatt utbildning ibland framför allt på det personlighetsutvecklande området. Inte nog med att personen inte lärt sig vad som avsågs utan personen tror att han/hon kan det. Det är självklart att enstaka misstag av denna art ej betyder så mycket.

4 och 5 Om eleven har en känsla av att resultatet som han/hon har kommit fram till är fel och detta fel beror på ett förbiseende som eleven ej märker vid en kontroll får eleven anses ha kommit en bra bit på vägen mot kunskap. Om eleven däremot lätt borde ha kunnat hitta felet rör det sig om ε-kunskaper.

6 Om eleven av sitt resultat inte kunnat märka att ett försåtligt slarvfel begåtts kan kunskapen klassificeras som sekundärkunskap annars ε-kunskap,

7 Man kan fråga sig om det var slumpen som gjorde att uppgiften blev rätt. Under alla omständigheter måste en sådan kunskap vara ganska litet värd.

8 Detta är sekundärkunskap enligt definitionen.

9 Verklig kunskap: primärkunskap.

Sammanfattningsvis vill jag i modellen bedöma slarvfelen relativt strängt. Det är bara under speciella omständigheter som de inte visar tecken på kunskapsbrister. En person som är osäker inom ett område märker inte så lätt ett slarvfel medan en person som behärskar området omedelbart reagerar mot slarvfel, eftersom de för det mesta är "strukturavvikande". I min modell betraktas slarvfel och kunskapsfel därför som i stort sett ekvivalenta.

Att ha kunnat men "glömt"

Den kategorisering av kunskap som gjordes på sid 33 avsåg hur en elev klarade uppgifter men det sades inget om när uppgifterna gavs. Man förutsätter ju vanligtvis att man testar en elevs kunskaper vid slutet av inlärningsperioden av området i fråga. Av praktiska skäl är detta naturligt. Egentligen vore det viktigare att känna personens kunskaper längre efter utbildningens slut, då personen just står i begrepp att använda dem. Detta går naturligtvis i allmänhet inte. Det längsta man kan komma är antagligen att göra bedömningen av kunskaperna vid utbildningens slut och därvid göra den så att den främst tar hänsyn till mängden av bestående kunskaper. Jag vill nu påstå att det är då egentligen bara primärkunskaper som består. Som de andra typerna av kunskap är definierade är det naturligt att inse att de är flyktiga. Att kunna en sak men inte vara säker på att det man kan är rätt är inte så mycket värt på längre sikt. Det är därmed inte sagt att all primärkunskap består. Mycket som t ex är av fakta-karaktär glöms bort. Vid en förnyad testning finner man att den övergått i sekundärkunskap eller $\mathfrak{E}$-kunskap. Det har påvisats att om man en gång behärskat ett område är det senare relativt lätt att "friska upp" sina kunskaper. Man har lärt sig så mycket att det enda man behöver göra är att "slå upp" vissa saker i böcker; man vet var man kan finna vad man söker och har tillräckligt baskunnande för att sätta in det i sitt sammanhang. En sådan kunskap är väsentlig men den kan inte klassificeras som primärkunskap.

Betydelsen av primärkunskap

Jag har i det föregående velat framhäva just primärkunskapens betydelse, dvs att man själv kan avgöra att man löst uppgiften riktigt. Det finns flera skäl till att detta är viktigt, särskilt vid matematiskt inlärande.

- Matematikinlärandet är i hög grad hierarkiskt. Man använder och tillämpar vad man lärt sig i ett moment vid "nästa" moment. Ett sådant tillämpande ställer höga krav på att det ursprungliga momentet är säkert befäst. Särskilt viktigt är att man "tror på" sina tidigare kunskaper. Man tillämpar ogärna saker man inte tror på. Ett förhållande som gör matematikinlärande så svårt är att det i hög grad sysslar med högreordningsabstraktioner. Med en förstahandsabstraktion menas en abstraktion som direkt avser konkreta saker. Ett exempel är t ex additionen 2 + 3 som symbol för antalet element i en union av två disjunkta mängder med 2 och 3 element. Det är då fråga om en förstahandsabstraktion. Definierar man sedan multiplikation med hjälp av addition, dvs $3 \cdot 4$ som 4 + 4 + 4 blir multiplikation en andrahandsabstraktion. För att tillgodogöra sig den

fordras att man först förstått additionen. Division blir sedan en tredjehandsabstraktion genom att t ex 15/5 definieras som lösningen till 5 · □ = 15. Division kan emellertid göras till förstahandsabstraktion om 15/5 är resultatet om man delar 15 föremål i 5 högar. Svårigheten är i och för sig inte abstraktionen; begrepp som mamma och mat är abstrakta men inom en 2-3-årings fattningsförmåga. Svårigheten ligger i att vänja sig vid abstraktionerna, göra dem tillräckligt familjära. Det blir de inte förrän man känner dem "innan och utan" - inte förrän man är helt säker på deras egenskaper. Det rör sig då om primärkunskaper.

- Det ställer erfarenhetsmässigt stora krav på matematikkunnande att tillämpa matematik. Det finns otaliga vittnesbörd i olika former från lärare som klagar på elevernas förmåga härvidlag. De kan en sak på matematiklektionerna men när de kommer till tillämpningsämnena är det stopp. De är vana vid x och y från matematiken. I det andra ämnet används andra bokstäver, osv. Denna bristande förmåga orsakas ofta av att matematikkunskaperna sitter för ytligt. Det är först när man är säker på matematiken som den går att tillämpa med framgång.

- Jag har tidigare diskuterat att det bästa receptet mot slarvfel är att grundligt behärska ett ämnesområde så att man lätt märker när "mönstret rubbas".

- Jag har också diskuterat att de enda kunskaper som har chans att bli bestående är primärkunskaper.

Hur får man primärkunskaper?

Vägen till primärkunskaper går via sekundärkunskaper. Det krävs emellertid mer arbete och längre tid. Till att börja med är man osäker på om ens svar på frågor och uppgifter är riktiga men så småningeom ökar säkerheten. Vid all inlärning är det viktigt med ett visst mått av överinlärning, dvs man fortsätter att träna trots att man skenbart behärskar området. Det hjälper inte att enbart träna på uppgifter av samma typ utan svårighetsgraden bör stegras successivt.

En erfarenhet är att man i allmänhet inte uppnår primärkunskaper inom en kurs förrän man gått igenom kursen efter. Man får t ex primärkunskap på lågstadiets kurs först sedan man gått igenom mellanstadiet. Det är svårt att få primärkunskap på högstadiekursen förrän efter N-linjen osv. Flertalet elever behöver alltså "bädda in" sina kunskaper inom ett matematiskt område genom att studera ett mer omfattande område. Det ger det perspektiv på kunskaperna som är nödvändigt för primärkunskap.

Det förhållandet att väldigt få kan tillägna sig primärkunskaper förrän i kursen efter illustrerar de omvittnade svårigheter som finns att tillämpa det man just lärt sig. Det man däremot kan tillämpa är kunskaper från kursen före. Inom denna kurs har man hunnit skaffa sig primärkunskaper.

Sekundärkunskaper är också angelägna. Sådana kunskaper inom ett större område kan ge primärkunskaper inom ett mindre område, som ingår i det större. Sekundärkunskaper är ibland liktydiga med orienteringskunskaper. Att skaffa sig sådana är ofta motivationshöjande.

Strategi

Att sträva efter att alltid bara skaffa sig primärkunskaper är inte en optimal strategi. I stället bör man tillägna sig ett visst mått av sekundärkunskaper. Det är den naturliga vägen och det ger möjlighet att förvandla tidigare sekundärkunskaper till primära.

Partiell kunskap

Begreppen primär- och sekundärkunskap har anknytning till forskning angående s k "partiell kunskap". Den fick särskild aktualitet i samband med den ökade användningen av flervalsprov på 1960-talet. Se t ex Boström (1971) och Lord-Novich (1968). Det kan konstateras att försök att vid rättning av prov också ta hänsyn till den prövandes egen bedömning av sina inlämnade svar inte lett till en förbättrad provvaliditet. Forskningen förefaller emellertid i första hand ha avsett test som provar relativt ytliga kunskaper och ej kvalificerat matematiskt inlärande.

Jag gjorde själv ett litet experiment (Håstad, 1978) när jag vid en tentamensskrivning i ett matematikämne vid KTH lät teknologerna uppskatta hur många poäng de skulle få på varje uppgift. Det visade sig emellertid att teknologerna i mycket liten utsträckning lämnade in lösningar som de inte trodde på. Något statistiskt säkerställt resultat att rätta lösningar, som teknologerna trodde på, skulle vara en bättre mätare på matematikförmågan - något som skulle ha stött min teori om primärkunskapers värde - kunde därför inte erhållas.

1.1.4 SPIK- OCH SKRUVINLÄRNADE

Inlärande går till på många olika sätt. Det sker längs ett brett spektrum från den ena ytterligheten - ett starkt målinriktat, skolmässigt inlärande - till den andra ytterligheten - att man, utan att veta om det och utan att ha inlärande i syfte, lär sig något. Jag ska i detta avsnitt skilja på två inlärningssätt kallade spik- och skruvinlärande. Spikinlärandet ligger nära den första ytterligheten och skruvinlärandet nära den andra.

Spikmetoden

Namnet har valts för att antyda att det är en metod som leder - eller avses leda - spikrakt på målen. Med några raska hammarslag har man drivit in kunskapen. Om den sedan sitter är en annan sak. Inlärandet enligt denna metod utmärks bl a av följande.

- Den är intentionell. Syftet är att inlärande ska ske av just det som lärs in. Inlärandet är skolmässigt, kursbundet, avsiktsfullt.

- Inlärandet är abstrakt, ofta teoretiskt, beskrivande och verbalt. Kunskaper som man läser sig till genom böcker är ofta av detta slag.

- Det egentliga kunskapstillägnandet sker ofta plötsligt, momentant. Det bygger vanligtvis på en plötslig insikt. Inlärandet är inriktat på förståelse.

- Inlärandet förutsätter vanligtvis god motivation hos den som ska lära sig. Traditionell kvalificerad teoretisk och akademisk utbildning använder ofta denna metod.

Skruvmetoden

Namnet vill ange att det är en mer omständlig metod, som ej går rakt på målet utan runt på olika sätt. Den fordrar ej så stor kraft men i stället uthållighet. Har man väl "skruvat i" kunskaper med metoden så sitter de ofta bättre fast än om de spikas i. Metoden utmärks bl a av följande.

- Inlärandet sker gradvis. Man vet ej riktigt när man fick kunskapen-färdigheten men man kan konstatera att man besitter den.

- Inlärandet bygger inte så mycket på förståelse utan mer på tillvänjning, familjarisering. Man gör sig successivt alltmer bekant med det nya.

- Man lär sig använda kunskapen-färdigheten innan man egentligen förstår hur den hänger samman och hur den knyter an till tidigare färdigheter man förvärvat. Kunskapstillägnandet är operationellt och inriktat på användning.

- Man tillägnar sig lika god förståelse som med spikmetoden men ofta kommer förståelsen efteråt. Man lär sig först det hela utantill - mekaniskt - och efteråt klarnar sammanhangen. Kunskaperna blir ofta grundare och svårare att generalisera, specialisera och transferera. Det man kan, det kan man, men kunskapen är begränsad.

- Livet lär en vanligtvis genom skruvmetoden. Man lär då genom att leva med det nya. Man har det nära och kan se det ur många vinklingar. Det tränger sig på en och man kan ej komma undan det. Motivationen blir därigenom ofta stark. vilket verkar inlärningsbefrämjande. Inte sällan sker inlärandet ofrivilligt, utan påtagligt stark motivation. Det går genom att kontakten med det som lärs in är så intensiv.

- Inlärning enligt denna metod tar vanligtvis lång tid. Skolor och kurser arbetar i viss mån enligt denna metod, ibland avsiktligt men ofta oavsiktligt.

- Man möter vanligtvis det man ska lära sig i sin helhet på en gång. Någon strukturering av inlärningsgången sker oftast ej. Man lär sig inte enkla delar och specialfall först utan får kämpa med

allt på en gång. Detta hindrar inte att man får kunskaper och färdigheter stegvis. Ett exempel är spädbarnets talinlärande. Det sköljs över med ord av alla slag men bygger successivt upp ett eget ordförråd.

- Inlärning av psykomotoriska färdigheter sker ofta enligt skruvmetoden.

- Inlärandet sker under täta repetitioner och återkopplingar.

Spik- och skruvmetoden och några undervisningsprinciper

Under årens lopp har formulerats många "principer" (teorier, regler, metoder) för inlärning och undervisning. Jag ska skärskåda några av dem i relation till modellen med ett spik- och skruvinlärande. Först några som närmast relaterar till skruvmetoden.

- "Learning by doing". Detta är i princip också huvudtanken bakom skruvmetoden. Man lär sig genom att arbeta med de saker man ska lära sig.

- "Trial and error". En annan huvudingrediens i skruvmetoden. Vad livet lär en sker ofta enligt denna princip.

- "Repetition är kunskapens moder". Återigen en hörnsten i skruvmodellen.

- "The deep-end principle". Denna princip innebär att man låter eleven - den inlärande - möta ett begrepp eller en metod i hela sin vidd och inte genom specialfall och arrangerade tillrättaläggande: "Man knuffar i barnet i den djupa änden av bassängen på en gång." Som jag formulerat skruvmetoden är detta ytterligare en hörnsten.

- "Discovery-metoden". Denna princip är inte renodlad skruv- eller spikmetod. Den förutsätter en nära och förutsättningslös kontakt med det som ska läras in. Eleven ska själv upptäcka sammanhang. I detta hänseende är den skruvbetonad. Å andra sidan innebär discovery-metoden hård styrning så att "upptäckterna" verkligen sker. Därigenom är den spikinriktad.

- "Självinstruktion". Den är skruvbetonad genom att den möjliggör för eleven att bestämma sin egen takt men spikbetonad genom att den leder till isolering bort från omgivningen, som spelar en central roll i skruvinlärandet.

- "Projektinriktad undervisning". Genom betoningen av kontakt med samhälle och yrkesliv har den klara skruvinslag.

Slutligen några principer som närmast är att hänföra till spikmetoden.

- "Programmerad inlärning". Den är hårt styrd och mycket artificiell. Den har en av sina svagheter i svårigheterna att anpassa kursstarten till elevens förkunskaper.

- "Undervisningsteknologi". Den leder genom sin systematiska natur lätt till spikmetoder även om detta ej är nödvändigt.
- "Learning by understanding". En hörnsten i spikinlärandet.
- "Datorstyrd undervisning". Genom sin artificiella natur är den spikinriktad. Den kan dock ge möjligheter för eleven till en mycket intensiv kontakt med det som ska läras in och en mycket mer verkningsfull återkoppling än vad "naturen" själv ger.
- "Heuristisk undervisning". Den är direkt inriktad på inlärning och därigenom spikbetonad. Å andra sidan är utgångspunkten i elevens situation skruvinriktad.

Att spika i en skruv

Detta är det vanligaste misstaget. Några exempel:

- Man använder en metod som bygger på förståelse men går för snabbt fram - eller siktar över målen - så att eleven - den inlärande - tvingas lära sig utantill och bara härma sig fram.
- Man försöker lära en elev en sak innan han/hon är mogen för den.
- Man försöker läsa sig till kunskaper som man bättre får genom att aktivt pröva sig fram.
- Man inför en onödig formalism som skymmer målet.
- Man lär ut onödiga saker.

Att skruva i en spik

Detta misstag är ovanligare. Några exempel kan dock ges:

- Man underlåter att ge utbildning.
- Man låter bli att förklara sammanhang och underlåter att besvara frågor.
- Man underlåter att träna kommunikationsfärdigheter som kan underlätta en systematisk inlärning.

Vilken metod används mest?

Det föreligger en strävan hos skolan att föredra spikmetoden. Det finns flera skäl till detta. Elevernas skoltid är begränsad och det är mycket man önskar att eleverna ska lära sig. Man önskar då en systematiserad inlärning som snabbt leder till målet. Vidare är ju skolan fortfarande i hög grad teoretisk och boklig. Det är då naturligt att välja den mer teoretiserande spikmetoden. I den pedagogiska debatten har ofta förståelsen betonats och man har då tagit avstånd från drill och mekaniskt inlärande. I mer nyanserade sammanhang har man talat för en kombination av förståelse och träning (drill) men samtidigt satt förståelsen främst både i betydelse och vad gäller inplacering i tiden.

Det är självklart att den snabbare och rationellare spikmetoden är att föredra för elever och inlärningsobjekt som den passar för. Skolan har i sin premiering av teori ofta använt denna metod även i fall den passat mindre väl. Elever och lärare har blivit frustrerade när de märkt att inlärningen enligt denna metod inte fungerat. Elever har blivit besvikna över sina misslyckanden och över att de kommit till korta gentemot kamrater vid olika former av "påskyndad inlärning". Ibland har det lett till att de aldrig gett sig själva chansen till att skaffa sig avancerade kunskaper med skruvmetoden. Lärare har många gånger känt att en viss teoretiserande metod varit olämplig men inte haft styrka, tålamod eller tid till sitt förfogande att i högre grad gå över till skruvmetoden. Det måste samtidigt understrykas att skolan i stor utsträckning förmått kombinera spik- och skruvmetoden på ett lämpligt sätt och nått goda inlärningsresultat.

Det förtjänar påpekas att kunskaper och färdigheter som den "gamla skolan" ansågs ge i högre grad än den "nya skolan" ofta förvärvades genom ett skruvinlärande. Det gäller t ex:

- grundläggande räknefärdighet
- förmåga att skriva sitt modersmål
- ordförråd i främmande språk.

Visserligen var inlärandet i den gamla skolan systematiskt men drillen dominerade över förståelsen. Kännetecknande var vidare att man hade mycket tid till sitt förfogande och att repetitioner med en successivt stegrad grad av fördjupning var inbyggda i systemet.

Hur bör metoderna kombineras?

Som framgår av det föregående är inte metoderna klart avgränsade. I viss bemärkelse utgör de ytterligheter. För att uppnå en effektiv inlärning bör de båda metoderna kombineras. Man får därvid lita till de rön som under århundradenas lopp framkommit genom lärares och andras samlade och systematiserade erfarenheter. Att finna en allmängiltig metod för inlärning eller att ens formulera några få huvudprinciper torde i nuvarande läge vara föga meningsfullt.

I ett idealtillstånd får en individ genom kontakten med sin närmiljö tillräcklig stimulans så att en önskvärd inlärning kan komma till stånd. I de flesta fall räcker emellertid inte detta till. Formell utbildning måste anordnas. Jag ska särskilja några olika syften med denna utbildning:

- att intensifiera närkontakten

Det är vanligt att det man vill lära sig inte förekommer så ofta i ens närmiljö att det ger de intensiva kontakter som behövs för att man ska kunna tillägna sig det tillräckligt bra. Det finns t ex inte fransmän i ens närmiljö så att man kan lära sig tala franska. Man stöter inte på tillräckligt många räknesituationer så att man lär sig räkna. Behovet att skriva brev och meddelanden till varandra är inte så stort osv. Skola och systematiserad inlärning behövs för att ge en tillräckligt med "övningsmaterial".

o att förklara omgivningen

För att skaffa sig brukskunskaper är det angeläget att man "förstått" sin omvärld. Det finns olika grader av sådan förståelse. För brukskunskaper räcker det med ett operativt kunnande men detta är mycket viktigt. Piaget understryker kraftigt detta i sin beskrivning av barnets utveckling från figurativt till operationellt kunnande. Furth (1977) har i sin tolkning av Piaget funnit att skolan verkligen bör ta sikte på att utveckla barnens operativa tänkande. Man behöver inte ha så bråttom med att lära barnen läsa och skriva. I stället bör skolan intensifiera barnens kontakt med närmiljön och få dem att fundera kring den och bearbeta den intellektuellt. Vi är här inne på en sinnrik kombination av skruv- och spikinlärande.

o att bygga upp modeller

Vi är härmed inne på spikinlärandets område. För att skaffa sig initiativkunskaper måste man arbeta i en symbolvärld och bygga upp modeller av olika företeelser, abstrakta eller konkreta. Dessa modeller kan sedan ge impulser för handlande. Det är här vanligtvis frågan om ett kvalificerat inlärande som man inte kan tvinga på någon människa. Ta som exempel matematikinlärandet. En strävan hos skolan har varit att lära ut vissa matematiska metoder som man sedan hoppas att eleverna ska kunna tillämpa i olika praktiska situationer. Det har visat sig att många inte klarar detta. Antagligen har man ställt målet för högt eller glömt att se till att eleverna har den rätta emotionellt-affektiva inställningen för att genomföra tillämpningen. Många gånger hade nog inlärningen bort koncentreras till att lära eleverna att använda matematiken i de vanligaste tillämpningssituationerna och inte hoppas på att eleverna tillägnat sig initiativkunskaper. Skolan bör dock allmänt stimulera individerna till att skaffa sig initiativkunskaper.

Högt kvalificerad inlärning inom det intellektuella området utmärks av ett komplext samspel mellan spik- och skruvinlärande. Inledningsvis består den av spikinlärande medan man bygger upp den teori och de modeller det gäller. I senare faser fordras det att man blir så väl förtrogen med teorin och modellerna att det närmast blir fråga om en tillvänjning som om de fanns i ens närmiljö. Det är då en sorts skruvinlärande.

Jag har fäst uppmärksamheten på skruvmetoden för jag tror att skolan bör beakta den mer än vad som sker. Det finns vissa risker att man uppfattar skruvmetoden som väl passiv och som ett uppgivande från skolans och lärarnas sida. Så behöver emellertid ej vara fallet. Ska denna metod fungera effektivt fordras en omfattande planering och en aktiv uppföljning. För övrigt bör den ofta kombineras med spikmetoder. Nedan ges några exempel på omständigheter under vilka skruvmetoden fungerar effektivast.

o Man får inte ha bråttom. Inlärningsplatåer är legio.

o Skolan bör sträva efter ett inlärande som kompletterar livet i övrigt. Saker som "livet lär en" bör skolan avhålla sig från; med självklara undantag som t ex trafikundervisning som måste sättas in tidigt.

- En central uppgift vid skruvmetoden är att utsätta den inlärande för variationer. De begrepp och metoder som ska inläras bör presenteras ur så många aspekter som möjligt.

- Förklaringar får inte utebli. De måste sättas in försiktigt, när den inlärande upplever ett behov. Detta behov bör helst vara uttalat men kan även anticiperas.

- Repetitioner är viktiga. Stoffet bör successivt återkomma i alltmer kvalificerad form och tillämpas i varierande former.

Experiential learning

James Coleman (1976) gör åtskillnad mellan två sorts inlärande, "information assimilation", såsom det sätt man lär sig i skolan och "experiential learning", såsom det sätt livet lär en. Han konstaterar att i båda fallen sker inlärandet i fyra steg men av olika slag. I det förra fallet är stegen:

1) Man erhåller information genom ett symboliskt medium.

2) Man organiserar informationen så att man förstår en allmän princip.

3) Man kan genomföra en speciell tillämpning enligt denna princip.

4) Man kan allmänt använda principen.

Vid "experiential learning" är stegen följande.

1) Man utför en handling och observerar dess effekt.

2) Man förstår effekten i detta speciella fall.

3) Man förstår den bakomliggande principen.

4) Man kan allmänt använda principen.

Coleman analyserar skillnaderna och framhåller att skolan borde använda det senare inlärningssättet i högre grad.

Han avrundar sin artikel:

"The investigation of these matters has a long way to go; what is important to recognize at this point is that careful and intensive examination of experiential learning will lead to it becoming far more fully embedded in the curricula of schools and colleges, and not relegated to peripheral tasks or limited to very young children, disadvantated youth, and preprofessionals."

Begreppet "experiential learning" påminner starkt om skruvinlärande och Colemans slutsats om att den borde användas mer sammanfaller med min.

Skruvinlärande och de fältberoende

Witkin m fl (1977) diskuterar de pedagogiska konsekvenserna av att en individ visar större eller mindre s k fältberoende. Fältoberoende individer är ofta mer lagda åt matematisk-naturvetenskaplig utbildning än de fältberoende som är mer omgivningsberoende och socialt lagda. Det kan uppfattas tala för att skruvinlärning vore mer aktuell för de fältberoende. Det torde ligga mer för sådana individer att långsamt vänja sig vid den matematik som finns runt omkring dem än att försöka följa uppbyggnaden av principiella matematiska modeller.

Yt- och djupinlärande

En grupp forskare i Göteborg har arbetat med frågor kring inlärning av kvalificerade begrepp främst inom samhällsvetenskapliga ämnen på högskolenivå. De har sammanfattat en del resultat i "Inlärning och omvärldsuppfattning" (Marton-Dahlgren-Svensson-Säljö, 1977). De särskiljer två typer av inlärning. Den ena avser en ytinriktad inlärning som kallas atomistisk. Den andra avser en djupinriktad inlärning som kallas holistisk. Den sista är den inlärning som bör ske men författarna konstaterar att prov ofta premierar den förstnämnda. De understryker betydelsen av att de studerande sätter sina kunskaper i relation till omvärlden och inser att det inte finns en sanning utan att det finns alternativa sätt att uppfatta företeelser.

Det är av intresse att sätta begreppen atomistisk och holistisk inlärning i relation till spik- och skruvinlärande. Det ska då först konstateras att Marton-gruppen i princip endast sysslar med vad jag kallat spikinlärande. De har studerat hur man tillägnar sig vetande om samhällsvetenskap genom bokliga och teoretiska studier. Djupinlärandet innebär en effektiv form av spikinlärande medan ytinlärandet är en avart. Det senare illustrerar verkligen svårigheter med spikinlärandet: det blir isolerat och leder inte till den kontakt med verkligheten som fordras för att kunskap ska bli meningsfull. Ytinlärandet som Marton-gruppen beskriver det leder knappast ens till brukskunskaper långt mindre initiativkunskaper. De senare fordrar djupinlärande.

Man kan vidare fråga sig var matematikundervisningen står vad gäller yt- och djupinlärande. Det råder ganska stor skillnad mellan att studera matematik och att studera samhällsvetenskapliga ämnen. Det råder också ganska olika uppfattning om hur studierna bör läggas upp för att de studerande ska ha nytta av dem i tillämpningssammanhang.

Ett ämne bygger upp en rad abstrakta modeller av verkligheten. De studerande behöver känna till en rad sådana modeller och också veta hur de tillämpas i praktiska situationer utanför ämnet i fråga. Träning - utbildning fordras i båda hänseendena. Ju fler modeller de studerande har arbetat sig in i och ju bättre förståelse de har för modellens egenskaper desto bättre skickade är de. Detta är helt oberoende av om de lär sig tillämpa modellen. Dessutom behövs sedan en omfattande träning i att tillämpa modellen i olika situationer och att tolka resultat från modellens användning. Matematiken är ett ämne som är ovanligt rikt på modeller. Många av modellerna är mycket

sofistikerade och har visat sig erbjuda fantastiska möjligheter när det gäller tillämpning och uppbyggnad av andra ämnen. Det krävs ett omfattande arbete av de studerande att sätta sig in i hur modellerna fungerar och se sammanhanget mellan de matematiska begrepp och teorier som ingår i olika modeller. Det rör sig här om studiet av vad som brukar kallas "ren matematik". Sedan kommer problem in kring tillämpningen av modellerna i andra sammanhang. De flesta beteendevetenskapliga ämnena är i ett annat läge. Antalet modeller som varje ämne har är relativt begränsat och många modeller har ett osäkert värde. Vid uppläggningen av högre studier i ett sådant ämne blir det angeläget att lägga större vikt vid tillämpningssidan.

En annan skillnad är att examinationsformerna är olika. Inom samhällsvetenskaperna förekommer det ibland att elever kan klara en utbildning med bara ytinlärande. Däremot är detta knappast möjligt i matematik. I detta ämne består proven av att lösa uppgifter, som visserligen ofta är standardbetonade men som ändå ställer krav på att eleven inhämtat de grundläggande idéerna i ämnet. Det är för de flesta matematikstuderande långt till det djupinlärande som Marton-gruppen önskar. Det behövs i allmänhet att man läst ytterligare en kurs för att få det perspektiv på kursen som behövs för att man ska kunna tala om djupinlärande. Se vidare sid 37.

En UHÄ-konferens (UHÄ-rapport 1977:3), vars tema var begreppsbildning och kunskapstillägnelse inom några universitetsämnen, blev en konfrontation mellan pedagoger och matematiker. Det visade sig att de har ganska olika syn på de pedagogiska problemen.

Matematikerna är inte så optimistiska att man genom ändrad syn på den pedagogiska uppläggningen ska kunna råda bot på denna svårighet och förbättra utbildningsresultaten. De tillmäter det samlade och integrerade kunnande, som har samlats av matematiklärare under århundraden, stor vikt. De beklagar att inte det pedagogiskt-ämnesmetodiska vetandet nått så långt att det i dag på radikalt sätt kan påverka matematikundervisningen. Matematikerna är i stort medvetna om den diskrepans som råder mellan de önskvärda målen för matematikundervisningen och dagens resultat. Pedagogerna å sin sida ser inte de begränsade intellektuella resurserna hos många studerande som ett så kraftigt hinder. Genom att vidga och modifiera målsättningen för ett ämne - och bl a låta tillämpningsförmågan spela en större roll - borde utbildningen kunna förbättras.

Lotsning

Ulf Lundgren (1977) konstaterar att man inte kan behandla problem angående inlärning utan att ta hänsyn till skolans sociala funktion och dess externa roll. Han har särskilt studerat inverkan av olika ramfaktorer och påvisat att de krav som kursplaner ställer leder till att lärarna tillgriper s k lotsning. Det innebär att lärarna gör ytliga försök att "leda eleverna åt rätt håll" men är oförmögna att verkligen ta utgångspunkt i elevernas situation och ge dem den hjälp och de förklaringar de verkligen behöver. Lundgren menar att språkets roll är viktig och därmed en elevs förmåga att tillgodogöra sig den kod som fordras för att ha glädje

av undervisning. Lotsningen leder till att skillnad mellan individer förstoras. Lundgren har på ett slående sätt påvisat vad de praktiska svårigheterna i klassrummet leder till i fråga om dåliga inlärningsresultat.

Jag är själv inte så negativ till värdet av lotsning, som Lundgren förefaller att vara. Man får t ex inte överdriva behovet av att en elev fullt behärskar ett moment innan eleven går vidare till nya moment som utnyttjar detta moment. Det räcker att eleven har ett visst minimum av kunskaper inom momentet så att arbetet inom det nya momentet blir meningsfullt. Är luckorna för stora spårar dock arbetet med det nya momentet lätt ur genom att den lotsning som läraren har tid att ge inte är tillräcklig. Med det behövliga minimet av förkunskaper så finns det emellertid goda chanser att eleven genom arbetet med det nya momentet fördjupar förståelsen för de föregående momenten. Kanske innebär det att eleven övervinner en av de onda cirklar som kännetecknar matematikinlärande. Under alla omständigheter får eleven ökad färdighetsträning. Att eleven ger sig i kast med det nya momentet utan perfekta förkunskaper fordrar emellertid lotsning. Den innebär ett typiskt skruvinlärande: läraren gör inga försök att ge omfattande förklaringar utan inskränker sig till att hjälpa eleven att vänja sig vid den matematik det gäller. Läraren ansluter sig därvid till en gammal och beprövad undervisningstradition.

I motsats till Lundgren tror jag inte att de rent språkliga svårigheterna är avgörande. Vissa elever har en intellektuell oförmåga att hålla flera saker i huvudet samtidigt. Detta förhållande parat med en bristande motivation och därmed bristande vilja att lägga ned det arbete som fordras för att "plugga in" metoderna orsakar ofta att en elev misslyckas.

Slutord

Sammanfattningsvis konstaterar jag att man vad gäller matematikinlärande för de breda befolkningsgrupperna får lita till skruvinlärande i ganska stor utsträckning. Det är relativt få förunnat att via ett kvalificerat spikinlärande uppnå ett djupinlärande.

1.1.5 POTENTIALEN HOS EN MATEMATIKUTBILDNING

Jag ska i detta avsnitt diskutera ett begrepp som jag kallat en matematikutbildnings potential. Målet är att få fram ett **mått** på vilka möjligheter till matematikinlärande en viss kurs eller utbildning ger. Däremot ska jag inte primärt diskutera utfallet av matematikkursen, dvs vilka kunskaper och färdigheter som de som gått igenom kursen verkligen får.

Potentialen hos kursen hänger nära samman med de ramfaktorer som finns. De viktigaste ramfaktorerna för ett framgångsrikt matematikinlärande är den tid eleverna har till sitt förfogande och elevernas inlärningsförmåga. Mitt syfte är att ställa upp en enkel modell för matematikinlärandet där jag väver samman tiden och inlärningsförmågan. Genom att använda modellen på en kurs får jag fram ett mått på kursen som kallas kursens potential. Potentialen är i själva

verket en vägd tidssumma. I avsnitt 2.1.2 beräknar jag potentialen för olika kurser i svensk matematikundervisning på 50-talet och 70-talet. På detta sätt får jag en grund för ett studium av de förändringar som skett och en möjlighet att jämföra årtiondena.

Existerande teoribildning

Teorier hur inlärandet - och då i synnerhet i matematik - beror på den tid som läggs ner förefaller vara mycket begränsade. Jag ska i det följande referera vissa undersökningar och teoretiska analyser som har anknytning till mina problemställningar.

Carrolls modell

Carroll (1963) uppställde 1963 "A model of school learning". Modellen gick ut på att graden av inlärning för en elev (degree of learning, amount of learning) är en funktion av kvoten

$$\frac{\text{tid använd för inlärning}}{\text{tid behövlig för inlärning}}$$

Man förmodar att han avser att omfattningen av vad eleven lärt sig är en monotont växande funktion av den angivna kvoten. Annars är modellen meningslös.

Enligt Carroll så beror den använda tiden i täljaren på

1) tid anslagen för inlärning
2) elevens ihärdighet - uthållighet (perseverence).

Den behövliga tiden i nämnaren beror på

3) elevens förutsättningar för inlärande (aptitude)
4) undervisningens kvalitet
5) elevens förmåga att tillgodogöra sig undervisningen.

I ett senare arbete har Carroll (1971) diskuterat möjligheterna att mäta de ingående variablerna. Han pekar därvid på de stora svårigheterna. Hans ursprungliga erfarenheter härrörde sig från språkundervisning, där vissa variabler, som t ex omfattningen av vad som lärts in, dock är enklare att mäta.

I detta avsnitt sysslar jag främst med två av Carrols variabler nämligen 1) tid anslagen för undervisning och 3) elevens förutsättningar.

Mastery learning

Bloom (1971) lär ha inspirerats till tankarna bakom "mastery learning" av Carrolls modell. Idén bakom "mastery learning" är att eleven i varje steg i inlärandet skaffar sig djupa kunskaper innan han/hon går vidare. Om eleven behärskar ett visst kunskapsområde

underlättas det fortsatta inlärandet. "Mastery learning" har använts bl a inom den högre utbildningen i den s k Keller-planen, varvid PSI-metoden använts. PSI betyder Personalized System of Instruction. Därvid får eleverna arbeta individuellt med främst bokligt inlärande. Kursen indelas i en serie enheter. Eleven tar den tid han/hon behöver för arbetet med enheten och går sedan upp i ett test. Det krävs då att "allt är rätt", dvs mycket hög kunskapsbehållning för att eleven ska få gå vidare. Eleven får göra om testet tills han/hon klarar det. Erfarenheterna av försök kring "mastery learning" rapporteras vara goda. Bl a sägs elevernas frustration över att ofta misslyckas ha reducerats.

Tid och ekonomi

I sitt arbete "The Economics of Time in Education" diskuterar Christoffersson (1971) relationen mellan måluppfyllelse och tid. Han utgår från Carrols (1963) tidsmodell för inlärande och Blooms (1971) princip om "mastery learning". Vad gäller inlärningens beroende av tiden anför han: "Time needed in learning thus seems to be determined by some characteristics within the learner himself. These characteristics are aptitudes and ability to understand instruction". Han gör sedan vissa korrelationsberäkningar mellan tidsåtgång och andra variabler i ett empiriskt material som avser matematikundervisning i årskurserna 7 - 9 inom ramen för det s k IMU-projektet, varvid tidigare resultat från området delvis bekräftas. Detta material använder han också för att göra beräkningar av marginalkostnader genom en "cost-benefit-analys". Hans modell förutsätter därvid "mastery learning", som emellertid ej kännetecknade inlärningen i IMU-projektet. Genom denna förenkling undviker han svårigheter som uppstår när man försöker att närmare analysera beroendet "använd inlärningstid" - "uppnådd kunskapsnivå". Han påvisar dock att marginalkostnaderna stiger kraftigt när det gäller utbildning av de allra lägst presterande tills de uppnår "mastery".

Styrgrupp

Urban Dahllöf (1967, 1970, 1971) har framfört en teori att vissa elever i en skolklass utgör en styrgrupp för undervisningen. Den skulle bestå av de elever som ligger mellan den tionde och tjugofemte percentilen i prestationshänseende (intelligens), dvs de lågpresterande eleverna så när som de 10 % allra svagaste, Han motiverar sin teori utifrån inlärningspsykologiska och sociologiska resonemang. Sålunda skulle styrgruppen bestämma inlärningstakten genom att läraren inte går vidare till ett nytt moment innan eleverna i styrgruppen behärskar det föregående momentet. Teorin får kvantitativt stöd i de analyser Dahllöf gjort av flera stora undersökningar i differentieringsfrågor från 1960-talet. Studierna har främst avsett ämnet matematik men även ämnet svenska har studerats.

Ulf Lundgren (1972) tar upp Dahllöfs teori. I en studie av undervisningsprocessen "the teaching process" undersöker han styrgruppens roll ur olika aspekter. Han gör såväl en teoretisk analys som en empirisk studie, där han bl a jämför undervisningsförloppet i klasser där styrgrupperna har varierande intellektuell kapacitet. Han anför i sammanfattningen:

> "Without too much reservation, we can therefore say that we have clearly shown that the steering group - pupils in percentile 10 - 25 as regards intellectual ability - is of crucial significance for shaping of the teaching within the frame of the particular lesson, and thereby for the course of the teaching for the whole school year."

Som de viktigaste ramfaktorerna anger Lundgren tid och nivå hos den klass som undervisas: "We see the composition of the class and the time available as the main frames for the teaching success."

Gun Ericsson (1967) har jämfört olika mått avseende styrgruppen och i ett stort material från gymnasister i Göteborg funnit att korrelationskoefficienten mellan betygsmedelvärdet för elever vid tionde och tjugofemte percentilen är 0,98.

Tidsspillan och tidsbrist

Franzén (1975) ställer upp en modell för att illustrera konsekvenserna vad gäller tidsspillan och tidsbrist för elever med olika inlärningshastigheter. De befinner sig i en klassundervisning vars takt bestäms av den ovan diskuterade styrgruppen. Modellen används ej empiriskt. Den torde också vara för mikrobetonad för att kunna användas för mina syften.

När är målet nått?

Det råder ett mycket komplext orsakssammanhang mellan tid använd för inlärning och kunskapsutfallet. När Carroll talar om "tid som behövs för inlärning" avser han att det eleven ska lära sig är fixerat. För att kunna ange denna tid explicit fordras det att man kan avgöra när eleven erhållit den kunskap som eftersträvas. Så är emellertid i praktiken ytterst sällan fallet. Man har stora svårigheter att precisera vilka målen är. Den stora optimismen på mitten och slutet av 1960-talet, som "utbildningsteknologin" gav upphov till, gick ej att infria. Man trodde då att man med hjälp av mål "formulerade i beteende-termer" skulle kunna få den behövliga preciseringen. Det gick emellertid dåligt, även i ett sådant ämne som matematik, där förutsättningarna borde ha varit störst. Se Larsson (1973), Kihlborn (1974), Gårding (1974), Håstad (1974). Man har inte heller hittat metoder att mäta graden av måluppfyllelse.

I praktiken, som t ex vid försök med "Mastery learning", använder man empiriskt erhållna tumregler. Dessa är emellertid svåra att använda vid mer abstrakta modellresonemang.

IMU-projektet

I slutet på 60-talet fanns i Sverige det stora IMU-projektet. Det gäller högstadiets matematikundervisning. Ett självinstruerande material framtogs och de erfarenheter som gjordes vid användningen av materialet kartlades noga. Se vidare Larsson (1972, 1973). Eleverna nivågrupperades i princip inte men de kunde välja olika vägar genom materialet. De tilläts följa sin egen individuella arbetstakt.

Bland resultat från projektet intresserar i detta sammanhang relationen mellan en elevs arbetstakt och hans/hennes kunskapstillägnelse. Det rådde emellertid ingen signifikant korrelation mellan antal sidor en elev hunnit och elevens resultat på provräkningarna. Det visade sig också att det finns både snabba och långsamma "duktiga elever" och snabba och långsamma "mindre duktiga elever". Dessa resultat illustrerar den svårbemästrade situation som råder vid sammanhållen undervisning och visar samtidigt att det heller inte är så lätt att hitta lämpliga differentieringsformer.

Formell kontra informell undervisning

I en uppmärksammad rapport har Bennett (1976) jämfört kunskapsresultaten i läsning, matematik och engelska för elever som blivit utsatta för en undervisning som kan kännetecknas som formell, blandad respektive informell. Den första gruppen elever visade sig ha den bästa kunskapstillväxten. Man får vara försiktig med att dra generella slutsatser på grund av en begränsad studie som bara avsåg elever i årskurs 4. Ett av skälen till resultatet är enligt Bennett att elever vid formell undervisning tenderar att lägga ner mer tid vid inlärandet.

Effektiv tid

David Berliner (1978) har låtit observera 50 skolklasser i årskurs 2 och årskurs 5 för att utröna hur mycket tid son anslås åt de olika matematikmomenten, vilken andel av denna tid som eleverna verkligen var engagerade i matematikinlärning samt andelen av denna tid som ägnades åt så enkelt stoff att eleverna verkligen hade glädje av det. I det sista hänseendet utgår Berliner från att inlärning mest äger rum när eleverna arbetar med enkla uppgifter. Han fann mycket stora skillnader i tid som olika lärare ägnade åt de olika delmomenten, och skillnader på hundratals procent i totaltid. Vidare var den nettotid som eleverna verkligen ägnade åt effektiv inlärning överraskande liten. Den uppgick till 20 - 60 h under ett helt läsår. Berliner menar att denna nettotid i stället för resultat på prov kan användas för att utvärdera matematikundervisningen.

Inlärningshastighet

I sitt arbete "Pedagogisk forskning kring tidsallokering i skolan" diskuterar Torper (1975) bl a forskningsresultat angående inlärningshastighet. Enligt dessa har man skattat förhållandet mellan den långsammaste och den snabbaste elevens hastighet till 5-1 eller 6-1. Med en "mastery learning"-undervisning sjunker förhållandet till 3-1. Enligt forskningsresultat av Anderson (1973) skulle förhållandet sjunka till 2-1 om man beaktar den nettotid som verkligen används till inlärande.

Tiden och elevernas resultat

Rosenshine (1971) har sammanfattat ett 50-tal undersökningar som rör sammanhanget mellan undervisningen och utbildningsresultaten. Han redovisar tio undersökningar om den roll som undervisningstiden spelar för resultaten. De ger inga entydiga besked om tidens inverkan utan illustrerar svårigheterna att mäta ingående variabler.

Min slutsats

En genomgång av den existerande forskningslitteraturen relaterad till min problemställning visar följande.

- Teoribildningen är mycket bristfällig. Det finns mycket få konkreta resultat att bygga på.
- Den tid som används för inlärningen och elevernas matematikförmåga uppfattas som centrala variabler vid studiet av inlärningsresultaten.
- Det kan vara rimligt att ställa upp vissa makrobetonade modeller som utnyttjar tid och matematikförmåga för att få en grov beskrivning av situationen. Trots att man genom en sådan modell inte kan få en preciserad beskrivning kan den ändå ha sitt värde i det tillstånd av vetenskaplig ostruktur som råder.

Modellen

Jag inleder med att diskutera hur den använda tiden och elevernas matematikförmåga kan mätas.

Tiden

Den tillgängliga tiden för matematikinlärande består av

1) lektionstid i skolan
2) stödundervisning av olika slag i skolan
3) hemarbetstid med läxläsning
4) hemarbetstid med extraläsning, extralektioner, ferieläsning och liknande.

Lektionstiden under 1) fastställs med hjälp av läro- och kursplaner, varifrån sedan en uppskattning av lektionsbortfallet måste subtraheras. De övriga tre typer 2) - 4) av tider är svårare att mäta. Stödundervisning har dock i allmänhet mycket liten omfattning och kan försummas vad gäller dess tidsmässiga betydelse. Den innebär vanligtvis att klassundervisning byts ut mot undervisning i smågrupp, t ex i klinik. För läxläsning finns vissa undersökningar som jag avser att utnyttja trots att dessa är mycket ungefärliga och att deras validitet har ifrågasatts. Vad gäller övrig hemarbetstid är jag tvungen att nöja mig med än osäkrare data.

Tid anslagen för matematikinlärande kan naturligtvis användas på mer eller mindre effektivt sätt. Jag anger nedan några faktorer som påverkar effektiviteten.

- Elevernas förmåga till matematikinlärande
- Elevernas förkunskaper

- Elevernas intresse och motivation
- Lärarnas förmåga, intresse och motivation
- Anpassning av undervisningen till förkunskaperna
- Arbetsintensiteten
- Den press - repressalier - osv eleverna utsätts för
- Övriga yttre förhållanden under vilka arbetet bedrivs

Dessa faktorer är naturligtvis starkt inbördes beroende och långt ifrån heltäckande. Som nämndes i början av kapitlet ingår elevernas matematikförmåga i potentialbegreppet i modellen och därmed också i viss mån deras förkunskaper

Matematikförmågan

Det är angeläget att få något mått på förmågan till inlärande (i fortsättningen kallad matematikförmåga) hos elever som börjar en viss matematikutbildning. Det är svårt att hitta något helt idealiskt mått. Den bästa mätaren torde vara betyget från den utbildning eleverna genomgått före den aktuella utbildningen. Främst gäller det betyget i matematik men också medelbetyget i samtliga ämnen kan duga som ett mått. Enligt korrelationsundersökningar är resultatet från en tidigare kurs i samma ämne den bakgrundsvariabel som korrelerar bäst med resultat från kursen i fråga.

Tre premisser för modellen

Den modell som jag avser arbeta med avseende matematikinlärandet är av naturliga skäl mycket grov. Jag kan därför tillåta mig långtgående förenklingar vid definitionerna av de ingående variablerna. I form av några PREMISSER ska jag precisera förutsättningarna.

PREMISS 1. En elevs matematikförmåga när han/hon börjar en viss utbildning mäts genom betyget i den föregående utbildningen.

PREMISS 2. Matematikförmågan i en odifferentierad grupp elever, t ex på lågstadiet, förutsätts vara normalfördelad $(3,\sigma)$ med väntevärdet 3 och standardavvikelsen σ.

För σ väljs antingen värdet 0,3 eller 1. På detta sätt erhålls två modeller - i fortsättningen kallade A-modellen respektive B-modellen.

A-modellen innebär att matematikförmågan uppfattas som relativt litet differentierad. För elever med betyg i skalan 1-5 skulle förmågan variera mellan 2,4 och 3,6. Den har medtagits för att jag skulle få en miniuppskattning av effekterna av nivåns inverkan. Värdet 1 i B-modellen har valts för att det ger en komplett överensstämmelse med den 5-gradiga betygsskalan. Sålunda förutsätts

t ex då en elev med matematikbetyget 4 ha 4/3 av matematikförmågan hos en elev med betyget 3. Genom att betygen varierar mellan 1 och 5 i nu gällande betygsättning skulle enligt B-modellen matematikförmågan variera mellan 1 och 5. Skulle inlärningshastigheten vara proportionell mot matematikförmågan skulle i så fall också förhållandet mellan de 10 % med sämst förmåga och de 10 % med bäst förmåga vara 1 till 5, vilket är helt i överensstämmelse med de rön som gjorts inom forskningen och vilka citerades på sid 51.

PREMISS 3. Förändringar i rangordningen vad gäller matematikförmåga för elever som följer samma studiegång sker helt slumpmässigt.

Det som är viktigt för modellens värde är att det inte finns någon speciell elevgrupp som avviker systematiskt. Det får t ex inte vara så att elever som sedermera väljer gymnasiets N-linje ligger mycket lågt i rangordningen i årskurs 6 och senare "växer till sig". Inga forskningsresultat tyder på att det skulle finnas sådana grupper. Inte heller verkar skillnaderna mellan individerna öka med åren. Gösta Berglund (1965) har studerat s k intelligenstest och konstaterar: "Thus there is no general tendency towards either increased differentiation or increased integration". Jag kan därför förutsätta att matematikförmågan hos en odifferentierad grupp vuxna är normalfördelad (3, 0,3) (A-modellen) eller (3,1) (B-modellen). En annan sak är att en långtidsutbildad person lärt sig mer matematik och därmed fått bättre kunskaper.

Jag erinrar i detta sammanhang om den s k "regressionen mot mitten" enligt vilken en elevgrupp, utvald för att den lyckats bra på ett visst prov, kommer att lyckas sämre på nästa prov på grund av slumpmässiga faktorer, dvs dess resultat dras mot mitten. Denna effekt leder till att matematikförmågan i realiteten är mindre differentierad mellan grupper än vad senaste betyg ger uttryck för. Effekten kompenseras genom påverkan av den sociala miljön som i allmänhet har motsatt inverkan.

Nivån hos en matematikutbildning

Den nivå, som undervisningen inom en viss matematikutbildning ligger på, avgörs främst av olika egenskaper hos den grupp elever som följer utbildningen. Begreppet "grupp elever" kan här stå både för elever fysiskt närvarande i samma rum - t ex en skolklass - och för alla elever i landet som deltar i samma matematikkurs - t ex särskild kurs i matematik på högstadiet. Man kan tycka att den fysiska närheten skulle ha det helt dominerande inflytandet, dvs så att matematikundervisningen skulle gestalta sig väsentligt olika beroende på klassens "begåvningsprofil". Detta är emellertid ej så självklart. Den enstaka klassen är långt ifrån isolerad.

När en viss typ av matematikutbildning funnits några år inträder den i allmänhet i en sorts jämvikt. Undervisningen i de enskilda klassrummen där utbildningen i fråga bedrivs är överallt ganska likartad. Det är en rad faktorer som påverkar att ett sådant jämviktsläge nås. Jag ska nämna några av de viktigaste.

- Till en matematikutbildning finns i allmänhet ett slutprov av något slag. Det kan vara en tentamen, ett examensprov, ett centralt prov, ett standardprov. Ett sådant prov har en starkt styrande effekt på undervisningen. Elever, lärare och läromedelsförfattare skaffar sig snabbt information om hur proven är utformade och inrättar sig därefter. På lägre stadier såsom grundskolan är det lärare och läromedelsförfattare som direkt påverkas och därmed eleverna indirekt. På högre stadier är det eleverna som påverkas direkt. De övar sig på provuppgifter som har givits tidigare. Läromedelsförfattarna utger samlingar med provuppgifter. Lärarna ger provskrivningar som är så lika slutproven som möjligt osv. Slutproven åstadkommer på detta sätt en likriktning av undervisningen.

- Den relativa betygsättningen har också en likriktande effekt och förstärker därmed slutprovens roll. Vid dessa avgörs nämligen vilka betyg eleverna i en klass har att konkurrera om inbördes. För att ge klassen så goda chanser som möjligt är det viktigt att läraren koncentrerar arbetet på moment som förekommer i slutprovet. Mer udda moment kommer i skymundan. Aktuella inslag och en klass speciella intressen - t ex orsakade av vad den får vara med om vid undervisningen i andra ämnen - blir av underordnad betydelse. Matematikundervisningen inriktas på betygsgivande inslag och inte på att ge de omedelbara förkunskaper som eleverna behöver för andra ämnen. Se t ex Hamrin-Månsson (1976).

- Läromedlen har en starkt likriktande effekt. Studier har visat att lärarna mycket nära följer läromedlen i sin undervisning. Se t ex Lundgren (1972). För flertalet matematikutbildningar finns det alternativa läromedel att välja mellan. Valet är emellertid ofta en chimär. De flesta läromedelssystem är mycket lika. Läroböcker med en orginell och personlig utformning kan sällan hävda sig i konkurrensen.

- Eleverna som börjar en viss utbildning har ofta vissa specificerade förväntningar angående matematikens krav och nivå. Dessa förväntningar påverkas framför allt av hur viktig del matematiken utgör av utbildningen i fråga. Sådana förväntningar verkar likriktande.

- När ämnet matematik ingår i en utbildning uppfattas det ofta som ett viktigt för att inte säga centralt ämne. Det gäller alla de matematikutbildningar som jag studerar i denna undersökning. (Däremot är så inte fallet i t ex högstadiets allmänna kurs och i humanistiskt-språkligt betonade utbildningar.) I ett centralt ämne är det angeläget med goda kunskaper. Läraren försöker därför forcera och mätta undervisningen så att eleverna lär sig så mycket som möjligt. Ett tecken på att undervisningen bedrivs i hög takt är att några inte hänger med. Dessa "några" får dock inte bli för många. Dels blir stämningen och arbetsmoralen i klassen då för dålig dels minskas ju "verkningsgraden" av undervisningen när elever faller ifrån. Men klarar sig alla blir man - det gäller både lärare och elever - orolig över att utbildningen inte är tillräckligt effektiv. Denna inställning

resulterar i uppkomsten av en styrgrupp såsom diskuterades på sid 49. Lärarkåren accepterar att inte kunna få "klara" (godkänna) samtliga elever mot att i stället ha rykte om sig att hålla kraven uppe. Eleverna å sin sida förefaller också acceptera systemet. Andelen elever som man på detta sätt accepterar att de faller ifrån avgörs mer utifrån riksnivå än för den enstaka klassen även om ett samspel finns.

- Traditionen spelar också en icke oväsentlig, likriktande, roll särskilt på lärarsidan. Detta är naturligt med hänsyn till den begränsade roll som den pedagogiska forskningen och teoribildningen spelar i den praktiska undervisningssituationen. Lärarna blir då tvungna att nästan uteslutande förlita sig på sina och sina föregångares empiriska undervisningserfarenheter, vilket minskar rörligheten och hämmar utvecklingen.

Sammantaget finns alltså en rad faktorer som leder till att undervisning inom en viss matematikutbildning får ungefär samma karaktär i varje skola. Denna slutsats har bl a verifierats av Dahllöf (1967). Han fann en stor likformighet i matematikundervisningens uppläggning. Det finns därför förutsättningar att karakterisera nivån med hjälp av en relativt enkel matematisk modell. Mot bakgrund av de punkter som angavs ovan drar jag slutsatsen att denna nivå beror på elevernas matematikförmåga. Det sker ett "insvängningsförlopp", där en rad olika faktorer påverkar utvecklingen så att relativt snart en kurs stabiliseras, varvid krav och inriktning läggs fast. Det som starkast påverkar vilken stabiliseringsnivå som uppnås är eleverna och deras förmåga.

Värdet av en matematiktimme

Vilken nivå en matematikkurs ligger på inverkar starkt på utbytet av den tid en elevgrupp lägger ned på matematikinlärandet. Ligger nivån högt lär man sig mycket mer under varje tidsperiod än om nivån ligger lågt. Man kan spekulera över graden av inverkan och på vilket sätt elevernas matematikförmåga avgör nivån. Då kommer Dahllöfs teori om styrgruppens roll naturligt in. Styrgruppen skulle enligt honom bestå av elever som i prestationshänseende ligger mellan 10:de och 25:te percentilen, dvs den består av relativt lågt presterande. Enligt Ericsson är korrelationen mellan betygen vid 10:de och 25:te percentilen mycket stark. Se vidare sid 50. Jag gör därför följande definition.

DEFINITION 1. Värdet i inlärningshänseende av en viss tid, som används för matematikinlärande är proportionellt mot matematikförmågan hos elever vid styrgruppens övre gräns, dvs vid nedre kvartilen.

I ett exempel ska jag visa hur värdet fastställs. Ta två matematikutbildningar på gymnasienivå, t ex det nuvarande gymnasiets N- och T-linje. Värdet av en matematiklektion avgörs enligt DEFINITION 1 av matematikförmågan hos en elev vid nedre kvartilen. Denna matematikförmåga mäts i första hand genom betyget som denna elev hade när han/hon började på N- respektive T-linjen (PREMISS 1). Detta

betyg kan erhållas ur tillgänglig betygsstatistik. Med kännedom om betyget kan elevens rangordning bland alla elever som läst särskild kurs i grundskolan fastställas. Man utnyttjar då att betygen är normalfördelade. Med kännedom om betygen i årskurs 6 hos elever som läser särskild kurs i matematik på högstadiet kan man räkna ut elevens rangordning i den odifferentierade skolan. Enligt PREMISS 3 sker nämligen förändringar i rangordningen mellan elever enbart slumpmässigt. Nu utnyttjas PREMISS 2, dvs att i en odifferentierad grupp svenskar är matematikförmågan normalfördelad (3, 0,3) (A-modellen) eller (3,1) (B-modellen). Vi kan då tilldela våra båda "nedrekvartilelever från N- och T-linjen" var sitt tal som anger matematikförmågan.

Säg att man då finner att matematikförmågan hos N-eleven vore 5 % högre än hos T-eleven. Detta betyder i sin tur att värdet enligt DEFINITION 1 av en matematiktimme vore 5 % högre på N-linjen än på T-linjen. En elev på N-linjen skulle enligt detta resonemang kunna få ut 5 % mera kunskap av en matematiktimme tack vare att han/hon har mer högpresterande kamrater. Undervisningen kan ju då läggas på en högre nivå, mindre tid behöver ägnas åt trivialiteter osv.

För att kunna genomföra beräkningar av värdet av olika utbildningar behövs en normering. Jag gör därför ytterligare en definition.

DEFINITION 2. Värdet av en tidsenhet, som används i matematikundervisning i odifferentierade klasser, dvs på låg- och mellanstadiet, är ETT.

På låg- och mellanstadiet i grundskolan sker numera matematikundervisningen i allmänhet i odifferentierade klasser, där dock elever som deltar i vissa former av special- och särskoleundervisning är undantagna. DEFINITION 2 innebär att jag tilldelar en tidsenhet som används vid matematikinlärande på låg- och mellanstadiet värdet ett. Detta kan sägas illustrera att matematikkurserna på låg- och mellanstadiet är avsedda för ett riksgenomsnitt av svenska ungdomar.

För matematikundervisningens vidkommande sker numera en differentiering av utbildningen i och med årskurs 7. Under realskolans dagar skedde denna differentiering för vissa elever redan i årskurs 5. Tid som används för matematikinlärande inom högstadiets särskilda eller allmänna kurs i matematik eller i realskolan bör alltså tilldelas ett annat värde än ett. Detsamma gäller för matematikundervisningen på högre stadier.

Med utgångspunkt i betygsstatistik kan man på detta sätt tilldela tid använd inom olika matematikkurser olika värden. Dessa värden kan användas som koefficienter för att få en vägd tidssumma.

Begreppet potential

Jag har nu kommit fram till den punkt då jag kan definiera begreppet potential.

DEFINITION 3. Utgå från en matematikutbildning bestående av flera delutbildningar. Med dess potential avses summan av den tid som ägnats åt inlärningen, varvid varje tid multipliceras med sitt värde enligt DEFINITION 1.

Denna definition innebär t ex att potentialen för matematikutbildningen på grundskolans låg- och mellanstadium är den tid som utbildningen tar, eftersom värdet av denna tid är ett enligt DEFINITION 2. För en elev som gått ut grundskolan och läst allmän kurs på högstadiet blir potentialen tiden på låg- och mellanstadiet adderad med tiden för högstadiets undervisning multiplicerad med sitt värde, som är mindre än ett på allmän kurs, eftersom det är ett "negativt" urval till denna kurs. Potentialen för utbildningar som fortsätter ovan grundskolan fås genom att addera grundskoledelen med tiden i gymnasieskolan multiplicerad med sitt värde osv.

Man kan säga att potentialen är den tid det skulle ha tagit att skaffa sig de matematikkunskaper man har, om inlärningen hela tiden ägt rum i en odifferentierad klass. Detta sätt att uttrycka begreppet är dock tveksamt när det gäller kvalificerat inlärande på en abstraktionsnivå som majoriteten svenskar skulle skygga för.

Potentialen ger ett mått på de möjligheter en matematikutbildning ger och kan användas för att jämföra olika utbildningar. En annan fråga är sedan hur "möjligheterna" utnyttjas. Detta ska diskuteras i annat sammanhang.

Elever som repeterar en årskurs

Innan jag kan beräkna potentialen för olika utbildningar måste jag utreda hur dessa elever ska behandlas i modellen.

I den "gamla" skolan förekom kvarsittning i icke ringa utsträckning. I dagens skola förekommer det i stadier över grundskolan att elever återupptar en kurs som de tidigare helt eller delvis genomgått. Det är då två frågor som måste besvaras.

> Hur ska den inlärningstid räknas, då elever läser samma kurs två gånger?
>
> Hur värderas betyg erhållna när man läser en kurs för andra gången?

Vad först gäller tiden kan det vara rimligt att räkna med 30 % av denna tid. Det innebär helt självklart ett stort mått av godtycke vilket procenttal som bör väljas. Följande observation kan utnyttjas som ledtråd. En elev som går om höjer potentialen enligt denna 30 %-regel med 0,3 multiplicerat med den tid som gäller. Samma tillskott skulle ha erhållits om elevens matematikförmåga räknats upp med 30 %, dvs om hans/hennes betyg höjts med 30 %, dvs t ex från 2 till 2,6 eller från 3 till 3,9. Jag resonerar därvid om B-modellen med $\sigma = 1$. Detta visar att uppskattningen 30 % leder till ett rimligt resultat: det ger lika mycket att lägga 30 % till sin förmåga som att läsa en kurs två gånger.

Vad gäller hur betygen ska räknas kan först konstateras att elever som går om en årskurs i allmänhet har dåligt betyg i matematik. Enligt tillgänglig statistik är så fallet också med dem som avbryter en utbildning. De tillhör vanligtvis den lägsta fjärdedelen

i prestationshänseende. Elever som läser en kurs för andra gången har fått sådana kunskaper inom kursen att detta kompenserar deras ofta inte så goda matematikförmåga. Det kan därför vara rimligt att räkna deras matematikförmåga som om den låg vid nedre kvartilen. En genomgång av tillgänglig statistik (Orring, 1959) visar att detta stämmer relativt väl. Detta är också praktiskt i beräkningshänseende. Vi sammanfattar i premissform:

PREMISS 4. Inlärningstid för elever som läser en kurs en andra gång medräknas med 30 %. Betyg för elev som läser en kurs andra gången anses ligga vid nedre kvartilen.

Användning av potentialbegreppet

Potentialbegreppet kan användas för att jämföra vilka möjligheter till matematikinlärande som står till buds i t ex olika länder, i samma land under olika tidsepoker eller vid olika kursalternativ. I avsnitt 2.1.2 utnyttjar jag begreppet för att jämföra matematikundervisningen i Sverige på 1950- och 1970-talen.

En annan användning av potentialen är att diskutera vilka möjligheter olika differentieringssystem ger och vilka konsekvenser det då blir för olika elevgrupper.

Ta en odifferentierad matematikundervisning - t ex nybörjarundervisningen. Hur påverkas potentialen om eleverna differentieras i två kategorier? Man kan t ex tänka sig "idealfallet" att man kunde dela eleverna i en matematikstark grupp från vilken vissa klasser rekryteras och en matematiksvag grupp från vilken övriga klasser rekryteras. Hur många procent av eleverna bör man föra till den matematikstarka gruppen för att man sammantaget för alla elever ska få så hög potential som möjligt? En hög potential innebär ju möjlighet till en kvalificerad inlärning enligt DEFINITION 1 och är därför eftersträvansvärd.

Med de angivna förutsättningarna ger beräkningar för handen att man erhåller maximal potential om man låter den matematikstarka gruppen utgöra 40 - 45 % av årskullen. Potentialen höjs då i medeltal med maximalt ca 10 % jämfört med odifferentierade klasser. (De matematikstarka klasserna får 47 % högre potential och de matematiksvaga 18 % lägre potential än odifferentierade klasser.)

Antar man att man kan differentiera årskullen i fyra lika stora delar efter elevernas matematikförmåga skulle potentialen i medeltal öka med maximalt 18 %.

Det kan inte nog kraftigt understrykas att dessa resultat erhålls med hjälp av den teoretiska potentialmodellen. Vilket inlärningsresultaten blir beror sedan på lärares och elevers möjligheter att tillvarata de "potentiella" möjligheterna som finns enligt modellen. I praktiken begränsas också ökningen i potential genom att man inte kan dela upp eleverna på det angivna sättet.

För att belysa hur det ser ut i verkligheten använder jag uppdelning i särskild och allmän kurs i matematik på högstadiet i Sverige. Där har vi just den situation som beskrevs ovan med den skillnaden att eleverna själva väljer kursalternativ så att det blir fråga om en betydande överlappning av matematikförmågan.

Jag väljer att rekonstruera en situation byggd på förhållanden på högstadiet från början av 1970-talet. I tabellen anges hur 1 000 elever i årskurs 6 har valt allmän respektive särskild kurs. Eleverna är uppdelade i deciler efter sin matematikförmåga (= matematikbetyg i årskurs 6).

Elevers val av kurs på högstadiet efter matematikförmåga

Percentil	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	Summa
Allmän kurs	100	85	66	43	35	24	18	7	2	0	380
Särskild kurs	0	15	34	57	65	76	82	93	98	100	620

Som synes har 38 % valt allmän kurs och 62 % särskild kurs. Beräkningar visar att denna uppdelning leder till en höjning av medelpotentialen med 6 %. (Särskild kurs får 27 % högre potential och allmän kurs 27 % lägre potential jämfört med om ingen kursuppdelning skett.)

Som en ytterligare illustration av konsekvenser av potentialmodellen har jag analyserat fallet med matematikinlärandet av de 20 % mest matematikstarka eleverna i årskullen. Hur bör dessa uppdelas i två delar för att man ska få maximal potential? Beräkningar visar att man även i detta fall bör låta de ca 40 % mest högpresterande bilda rekryteringsunderlag för vissa klasser och övriga 60 % för de andra. Då höjs potentialen i medeltal med 4 % jämfört med om ingen sådan uppdelning sker.

Genom att potentialbegreppet är ett mått på de möjligheter en matematikkurs ger kan det utnyttjas som underlag vid en systemutvärdering av matematikundervisningens resultat. Det kan då användas som ett alternativ till andra utvärderingsformer. Den vanligaste formen är ju att eleverna föreläggs en rad provuppgifter som de ska lösa under en viss begränsad tid. Det finns två huvudinvändningar mot att använda elevgruppers resultat på sådana prov som systemutvärdering.

- Genom den traditionella uppgiftslösningen mäts bara en del av målet för matematikinlärandet.

- Resultaten på proven beror i hög grad på hur mycket eleverna tränat på de uppgiftstyper som förekommer. Specialdrill lönar sig mestadels.

Att jämföra länders eller epokers matematikinlärande med hjälp av provresultat är därför olämpligt, särskilt om kursinnehållet delvis är olika. I stället kan potentialen beräknas för de utbildningar det gäller och varje term i potentialen förses med en viss koefficient, dvs en effektivitetsfaktor. Storleken av effektivitetsfaktorn beror bl a på

- de lärare som lett utbildningen
- elevernas prestationer som grupp
- skolsystemets konstruktion, t ex hur det uppmuntrar inlärande.

Anta att en matematikutbildning består av vissa delutbildningar betecknade 1, 2, 3, ... Beteckna den tid som utbildningen i omfattar med t_i, beteckna värdet av den enligt DEFINITION 1 och 2 med k_i samt effektivitetsfaktorn med s_i. Utbildningens potential är då

$$\sum_i k_i \, t_i$$

Talet

$$\sum_i s_i \, k_i \, t_i$$

är ett mått på resultatet av utbildningen. Jag kallar det för utbildningens kunskapsmått. Hur fastställs då s_i och inom vilka gränser kan den variera? Det lämpligaste är att det upprättas en bedömarkommitté, som fastställer s_i och som tar med alla tänkbara förhållanden som kan inverka. Troligtvis bör s_i inte variera för mycket, förslagsvis 75 % $\leq s_i \leq$ 125 %. Bl a måste hänsyn tas till hur eleverna lyckas på provuppgifter vid beräkningen av s_i. Jag har inte i denna rapport gjort några försök att uppskatta s_i för olika tidsepoker eller skolformer.

Potentialbegreppet kan också användas vid individevalueringen. För att bedöma hur omfattande matematikutbildning en elev har är det angeläget att känna utbildningens kunskapsmått

$$\sum s_i \, k_i \, t_i$$

där summan är utsträckt över de matematikkurser i = 1, 2, 3, ... eleven gått igenom. Men en elev kan ha tilllgodogjort sig större eller mindre del av detta kunskapsmått.

Jag inför nu en ny faktor, elevfaktorn e_i, som anger hur stor del av "kursen" som eleven tillgodogjort sig. Det gäller $e_i \leq$ 100 %. Jag får då ett tal

$$\sum e_i \, s_i \, k_i \, t_i$$

som jag kallar elevens kunskapsmått.

En viktig förutsättning för mitt resonemang i detta avsnitt är styrgruppens betydelsefulla roll: läraren inriktar undervisningen så att den ska passa eleverna vid nedre kvartilen. Därav följer

e_i = 100 % för elever över nedre kvartilen.

Självfallet har många elever tillgodogjort sig mer än eleverna vid nedre kvartilen men detta är ointressant i sammanhanget. Denna ökade kunskap tänks eleven utnyttja genom att han/hon lättare klarar senare matematikkurser. Alla elever över nedre kvartilen förutsätts genom

lärarens sätt att lägga upp undervisningen ha lärt sig tillräckligt för att gå vidare till nästa stadiums matematikkurs. (Detta antagande kan anses vara en konsekvens av systemet enligt vilket vår skolutbildning är upplagd. Skulle i vissa fall detta krav inte vara uppfyllt så att även elever över nedre kvartilen har svårt att klara sig i fortsättningen måste undervisningen betraktas som ineffektiv, vilket bör resultera i ett lågt värde på effektivitetsfaktorn s_i.)

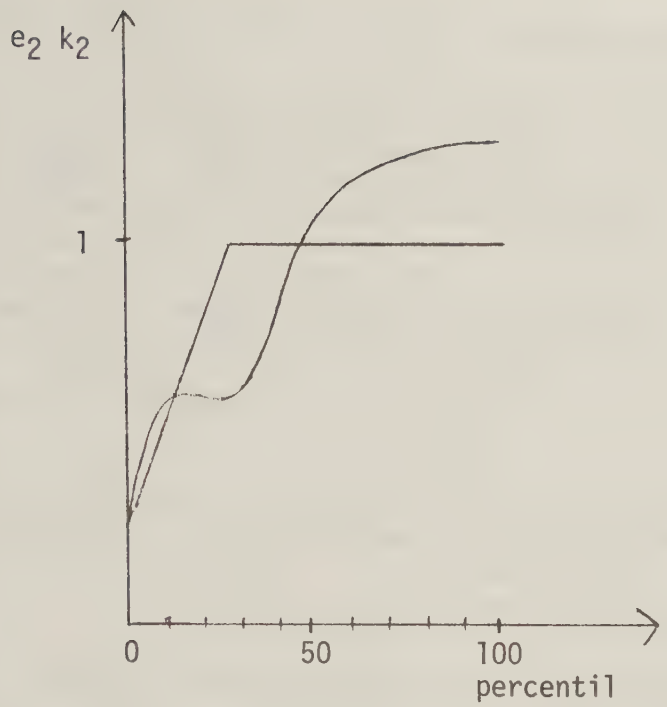
Under detta nästa stadium repeterar och fördjupar eleven de väsentliga inslagen från det föregående stadiet. Proven på det nästa stadiet är i allmänhet så uppbyggda att det är en absolut nödvändig förutsättning att kunna klara matematiken från stadiet under. Se vidare sid 74.. Talet e_i bör därför normalt vara 1 för alla utbildningar utom den sista.

Hur bestämmer man slutligen e_i för elever under nedre kvartilen? Jag föreslår att man utnyttjar elevens resultat på prov och sätter e_i till den andel poäng (rätta uppgifter) som eleven uppnår på prov jämfört med elever vid nedre kvartilen. Detta betyder att elever, som helt misslyckas, bara får ett litet tillskott i "sista" termen av sitt kunskapsmått $\Sigma e_i\ s_i\ k_i\ t_i$. Eventuellt bör också e_i vara mindre än ett i den näst sista termen. Det är knappast troligt att eleven har tillgodogjort sig denna utbildning när han/hon misslyckas så kapitalt senare.

Det förtjänar att nämnas att e_i kan vara nära ett även för elever under nedre kvartilen. Alla i klassen kan ju ha lyckats bra eller alternativt beror det på dåligt resultat hos elever vid nedre kvartilen, vilket dock bör resultera i ett lågt s_i för klassen (utbildningen, epoken, landet).

Som en illustration av hur det just framtagna elevkunskapsmåttet kan användas återvänder jag till tabellen på sid 60 och kursuppdelningen på högstadiet. Jag ska studera den term $e_2\ s_2\ k_2\ t_2$ i kunskapsmåttet som just avser högstadiet. Effektivitetsfaktorn s_2 sätts lika med 1 och t_2 uppfattas som lika i de båda kurserna. Värdet av $e_2\ k_2$ avgör således vilka konsekvenser kursuppdelningen har på eleverna i de olika decilerna. Om jag antar att $e_2 = 1$ för elever ovan nedre kvartilen och att e_2 sedan avtar linjärt ned mot värdet 0,2 för de allra matematiksvagaste eleverna i respektive kurs erhålls följande värden på $e_2\ k_2$.

Percentil	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
$e_2\ k_2$	0,38	0,63	0,57	0,68	0,99	1,14	1,17	1,23	1,26	1,27



Värdet av e_2 k_2 illustreras grafiskt ovan. Som en jämförelse har den brutna linjen inlagts som anger e_2 k_2 vid ett odifferentierat högstadium. Diagrammet visar att de matematikstarkaste och i viss mån de matematiksvagaste vinner på kursuppdelningen medan gruppen från 15:de till 45:te percentilen förlorar. Svackan vid 25:te percentilen orsakas av elever på särskild kurs som misslyckas att tillgodogöra sig undervisningen. I praktiken elimineras denna svacka genom att många sådana elever lämnar särskild kurs och når större framgång på allmän kurs.

Slutord

I det föregående har jag påvisat några användningar av potentialbegreppet, framför allt hur det kan användas vid jämförelse av olika differentieringsmodeller och i utvärderingssammanhang. Den viktigaste rollen har emellertid begreppet som kombinerat mått på de båda ramfaktorerna inlärningstid och elevförmåga. Potentialen anger vilka möjligheter till matematikkunskaper en utbildning ger. Det ankommer sedan på lärare och elever vilka kunskaper möjligheterna leder till.

I definitionen av potential spelar eleverna vid nedre kvartilen en nyckelroll. Man kunde alternativt låta median- eller medeleleven spela motsvarande roll. Skillnaden i resonemang och resultat blir endast marginell. Däremot tar begreppet inte hänsyn till en skolklass' homogenitet, vilket är en begränsning, eftersom denna enligt många spelar en viss roll för undervisningsresultatet.

Jag använder i avsnitt 2.1.2 i denna rapport potentialbegreppet för att påvisa hur mycket ramarna för matematikundervisningen ändrats i Sverige sedan 1950-talet. Man kan emellertid gå vidare och använda begreppet också i utvärderingssammanhang, såsom i de exempel jag tagit fram ovan.

1.2 Några begrundanden

Avsnitt 1.2 består av tre delar. Den första ägnas åt det i tillämpningssammanhang så viktiga begreppet matematisk modell. Jag ger en precisering av hur jag vill tolka begreppet. Därefter diskuteras de svårigheter som uppträder när man försöker undervisa i att tillämpa matematik.

Uppgiftslösandet dominerar matematikundervisningen. Det diskuteras i avsnittets andra del tillsammans med diagnostiska prov.

I den tredje delen diskuteras teoretisk och dess motsats praktisk matematikundervisning.

De tre delarna av avsnitt 1.2 gör inga försök att strukturera matematikinlärande genom att uppställa modellfragment. De innehåller en didaktisk analys av några väsentliga frågor som ett underlag till studiet av svensk matematikundervisning i kapitel 2.

1.2.1 OM MATEMATISK MODELL OCH SVÅRIGHETEN ATT TILLÄMPA MATEMATIK

Begreppet matematisk modell

Vid en diskussion om matematiken och hur den tillämpas intar begreppet matematisk modell en nyckelställning. Jag ska därför i detta avsnitt närmare analysera detta begrepp och hur det förhåller sig till matematikundervisningen.

Man utgår från en verklig situation som på något sätt ska beskrivas matematiskt. Det kan t ex gälla

A Ett tåg som går från en station X till en annan station Y

B Ett samhälle där vissa personer blir smittade av en infektionssjukdom, andra inte

C Trycket i en behållare, vars volym och temperatur ändras

D En varas pris vid olika tidpunkter

E En person som försöker lära sig matematik.

Att beskriva situationen matematiskt innebär vanligen att man skaffar sig en matematisk modell för situationen. En sådan matematisk modell beskriver inte situationen i sin helhet utan endast vissa aspekter av den. Ta t ex situation A ovan. En enkel matematisk modell för tågets rörelse är en linjär funktion, som anger den sträcka tåget rört sig som funktion av tiden. Denna modell tar inte hänsyn till att tågets fart varierar under färden och att det måste accelerera och retardera. Detta kan ske genom att modellen "förfinas", varvid den linjära funktionen ersätts med en mer komplicerad funktion. En annan begränsning i modellen är att den inte tar hänsyn till vilken väg tåget går mellan stationerna. Detta kan beskrivas av en helt annan typ av modell i

form av en karta eller liknande. En tredje typ av modell kan röra antalet passagerare i tåget, en fjärde har att göra med hur troligt det är att tåget är försenat. Varje modell beskriver en aspekt av situationen och då på ett mer eller mindre uttömmande sätt.

En modell kan vara mer eller mindre bra. Det är inte heller entydigt vad man menar med att en modell är bra. Den linjära funktionen, som beskriver tågets rörelse, är bra i den bemärkelsen att den är enkel och därmed lätt att använda och sätta samman med andra modeller. Den är mindre bra genom att den endast ger en mycket ungefärlig beskrivning av tågets rörelse och ej tar hänsyn till variationer i tågets fart. Det vanliga är att man anser en modell bättre ju mer exakt beskrivning av situationen den ger.

För situation B ovan gäller det vanligen att hitta en sannolikhetsmodell, som anger hur troligt det är att en person blir smittad. Modellerna för tågets rörelse var deterministiska, de berodde inte på slumpen.

I fallet C ger kunskaper i fysik en enkel matematisk modell (allmänna tillståndslagen t ex eller Van der Vaals lag). Man kan säga att man först har en fysikalisk modell för situationen. På samma sätt som en matematisk modell är mer eller mindre bra och endast tar hänsyn till vissa aspekter av den situation den avser gäller detta om en fysikalisk modell. De fysikaliska modellerna är ofta formulerade i form av matematiska modeller.

För situationen D ger ekonomisk teori matematiska modeller och i fallet E slutligen är det tyvärr dåligt med matematiska modeller. Situationen är alltför komplex och den pedagogiska vetenskapen har ännu inte nått så långt att det framtagits praktiskt användbara modeller.

Användning av en matematisk modell sönderfaller i tre steg:

1 Hitta en lämplig modell

2 Göra beräkningar inom modellen

3 Tolka resultaten tillbaka till situationen

Vi ska diskutera vilka principiella problem varje steg innebär.

Det första steget kallas ofta att "matematisera" situationen. Därvid behöver man göra följande.

1.1 Bestämma vilken aspekt av den praktiska situationen som ska beskrivas matematiskt

1.2 Genomföra ett datainsamlande så att parametrarna i den matematiska modellen kan fastställas

1.3 Skaffa sig kunskaper inom de matematiska områden från vilka modeller hämtas

1.4 Veta vilka modeller som vanligen används vid den situation det gäller. Sådana modeller kan kallas för standardmodeller

1.5 Om det inte finns lämpliga standardmodeller gäller det att kunna skapa egna (ad-hoc-) modeller.

Kravet under 1.4 kan vara av två principiellt olika slag. Dels kan det vara fråga om att behärska teorin för det ämnesområde till vilket situationen hör. Ett ämnes teori består ju till viss del av matematiska modeller. Dels kan det gälla att använda en metod som inte är typisk för ämnet men ändå är ett gängse matematiskt standardförfarande. Jag kan exemplifiera dessa två typer av krav med hjälp av situationerna A - E från sid 64. I fall C gäller det att kunna fysik och bl a känna till gaslagarna. I fall D är det ekonomisk teori som krävs. I fall A är visserligen viss fysik och mekanik inblandad men det gäller i högre grad att ha allmänna matematiska kunskaper för att bl a kunna ställa upp de funktioner det är fråga om.

Steg 2 kräver bl a

2.1 Förmåga att utföra numeriska beräkningar

2.2 Matematisk begreppskännedom, metodkännedom och problemlösningsförmåga

2.3 Förmåga att skapa ny matematik

2.4 Omformulering av modellen om den ej är lösbar så att den kan lösas.

Steg 2 ställer främst krav på rent matematiskt kunnande. Detta kan vara av högst varierande slag från utförande av enkla numeriska beräkningar till framtagning av principiellt ny matematik. Det finns genom århundradena många exempel på matematiska teorier som utvecklats för att lösa ett praktiskt problem från en tillämpningssituation. Även om matematiken dominerar steg 2 så är det en stor fördel att under detta arbete hela tiden ha i minnet vilken praktisk situation det hela avser. Det gör matematiken konkretare och därmed lättare att överblicka. Vidare kan man få idéer som sedan kan verifieras matematiskt. Ett sådant "oscillerande" mellan matematiken och verkligheten torde i själva verket vara mycket effektivt och mycket viktigt att utnyttja i pedagogiskt hänseende.

Steg 3 kräver bl a följande.

3.1 Att veta hur de resultat som framkommit genom teoribildningen och beräkningarna inom modellen ska tolkas i den praktiska situationen

3.2 Att kunna beskriva resultaten på lämpligt sätt

3.3 Att värdera de resultat som framkommit. Finns det anledning att tro att modellen varit bra?

Det förtjänar att anmärkas att det bästa kriteriet om en matematisk modell är bra eller inte är att se hur de resultat som man kan "räkna fram" med hjälp av modellen stämmer med de resultat man kan observera i verkligheten.

Svårigheten att tillämpa matematik

Hur man lär ut förmåga att tillämpa matematik har alltid varit en flitigt diskuterad fråga. Många menar att situationen i dag - i olika skolformer och överallt i världen - är föga tillfredsställande och att en förbättring är önskvärd. Det finns många anledningar till att detta är en svår pedagogisk fråga:

- Ansvaret för att eleverna lär sig tillämpa matematik är ett delat ansvar mellan matematiklärare och lärare i andra ämnen. Erfarenhetsmässigt är det svårt att dela ansvar och det blir lätt så att båda parter skjuter problemen åt sidan. Så har skett i denna fråga i stor utsträckning.

  Matematikerna styrs vid uppläggningen av matematikundervisningen av kraven i skriftliga prov och examina. Denna styrning sker delvis via eleverna som är måna om att klara sig bra vid proven och som behöver ett konkret och överkomligt mål för sitt arbete. I proven ställs i allmänhet inga eller ytterst små krav på tillämpningsförmåga. Ibland har uppgifterna en praktisk inklädnad av ofta stereotypt slag. Freudenthal (1973) karakteriserar tillämpningarnas matematiska innehåll som ofta mycket tunt: "What people usually call applications are routines of specializing, that is, substituting special values for the parameters in a general formula or a system of formulae." En huvudanledning härtill är att det är svårt att hitta bra tillämpningsuppgifter som passar i ett prov: de får inte ta för lång tid, inte kräva speciella förkunskaper från tillämpningsområdet, de bör vara möjligt att rätta objektivt, osv.

  Följden blir att undervisningen koncentreras på det matnyttigaste inför tentamen, på basfärdigheter och de lägre kognitiva nivåerna. Det blir inte tid för tillämpningar.

  Lärarna i tillämpningsämnena är ofta inte insatta i exakt vilken matematik eleverna studerat. De lider under en tidspress och prioriterar ofta andra mål inom sitt ämne. Gör de försök att göra en ordentlig matematisk behandling av ett avsnitt finner de att det kräver lång tid och att många elever har stora svårigheter. Stora brister i det elementära matematikkunnandet kommer ofta i dagen. De vill ha med sig hela elevgruppen och avstår från matematiseringen för deras skull som har stora svårigheter.

- För att arbeta med tillämpningar av matematik på ett meningsfullt sätt behövs en uppfattning av begreppet matematisk modell. I och för sig behöver man inte använda ordet "modell" men motsvarande föreställningsvärld är viktig. Detta förefaller emellertid vara intellektuellt svårtillgängligt. Många annars välutbildade personer har en ytterst diffus uppfattning om vilken roll matematiken spelar vid tillämpningar och vad man menar med en modell. Detta torde bl a bero på den inställning vederbörande fått under sin utbildningstid, som har sina rötter långt tillbaka. I UNESCO:s (1972) "New Trends in Mathematics Teaching" konstateras det t ex: "In classical treatment of mathematical physics the

modelling process was never discussed explicitly, perhaps because Newtonian model of mechanics was often such a good one for the problem considered."

De matematiska modellerna var så bra att ingen tänkte på annat än att de var en del av verkligheten. Att modellerna kan vara ytterst ungefärliga och att man kan ha fler modeller för samma företeelse öppnar nya perspektiv. Men det tar uppenbarligen emot att tillägna sig detta tankesätt, särskilt när det kommer i konflikt med den djupt grundade inställningen att matematik är någonting exakt! Hur kan då en modell vara ungefärlig och varför kan man välja modell?

Missförstånd kan också uppstå genom att begreppen modell och axiomsystem förväxlas. En modell kan ju specificeras genom att en uppsättning axiom anges. Ibland kan det till och med vara så att en axiomatisering genomförs med en praktisk situation som förebild.

- En annan svårighet är att hitta lagom komplicerade modeller. Om man utgår från en given praktisk situation får inte den modell man väljer vara för enkel. I så fall går för mycket av den praktiska situationen förlorad vid den matematiska beskrivningen. Matematiseringen blir då meningslös. Å andra sidan får modellen inte vara för komplicerad. Då klarar man inte att hantera den matematiskt. Man kan då t o m stöta på olösta matematiska problem. Det vanliga är att antalet variabler blir för stort. Utvecklingen av datortekniken under de senaste decennierna har givit väsentligt ökade möjligheter att hantera många variabler och stora datamängder. För undervisningsändamål är dock möjligheterna begränsade. Situationerna som man utgår ifrån måste därför väljas med omsorg. Detta leder till att arbetet blir för styrt och man kommer lätt bara fram till mycket standardbetonade modeller. Detta är inte pedagogiskt särskilt värdefullt.

- Det är svårt att fånga elevernas intresse för tillämpningar. Den vanliga situationen, att läraren efter att ha gått igenom ett avsnitt i matematikkursen letar efter lämpliga tillämpningar, är ej tillfredsställande från intressesynpunkt. Det ska då mycket tur till om det verkligen finns något som just då är aktuellt och som intresserar eleverna. Intresset skingras ytterligare av att matematikläraren ofta inte är tillräckligt insatt i bakgrunden till de tillämpningar som finns för att kunna ge stimulerande introduktioner. Att tillämpningarna på detta sätt introduceras i anslutning till ett givet matematiskt stoffområde för att belysa detta styr modellvalet - matematiseringen - på ett ofta olyckligt sätt.

Läget är ett annat om utgångspunkten är den motsatta. Man startar utifrån en situation som intresserar eleverna och som pockar på analys. Pollak (1970) säger: "Honest applications of mathematics begin with a situation in some other field that is not well understood and that would be worth understanding better. The hope is that a mathematical problem can ultimately be found whose solution will give insight (or even predictive power) in

the original situation. Thus, the first stage in actual applications of mathematics is the recognition that something needs exploring." Matematikundervisningen borde oftare ha som slogan "Här är en situation, tänk på den" i stället för det mer vanliga "Här är ett problem, lös det" eller "Här är en sats, bevisa den".

- Erfarenheterna visar att det är svårt att tillämpa matematik. Det fordras att man behärskar matematiken väl för att man ska kunna inse hur den kan tillämpas. Jag skulle påstå i enlighet med den uppställda modellen på sid 33 att det fordras primärkunskaper. Detta skulle betyda att man nästan aldrig är kapabel att tillämpa ett matematikområde som man just har lärt sig. Det är först tidigare inlärda områden fördjupade genom ytterligare matematikstudium som man kan tillämpa. Detta innebär inte att man behöver helt avstå från att exemplifiera hur ett matematikområde som just inlärts kan tillämpas. Syftet blir emellertid snarare att stärka elevernas motivation och fördjupa deras förståelse för och färdighet inom det just genomgångna matematikområdet än att lära sig tillämpa matematik.

- Att tillämpa matematik kräver mycket tid. Arbetet går ej att styra för hårt, eftersom då syftet lätt förfelas. En didaktisk metod som med fördel kan tillämpas är att låta eleverna återskapa tillämpningarna genom att de själva ställs inför problemen och ge dem en försiktig styrning. Detta kräver lång tid.

- Matematiklärarnas utbildning och inställning kan utgöra ett hinder för att få en effektiv undervisning i matematiktillämpning. Pollak (1970) säger: "We have assumed throughout that it is possible and proper to attack the problem rationally, that is, that a logical and hopefully well-reasoned discussion will contribute to the solution of the problem. It is currently fashionable at times to question the relevance of reason to matters of education. We also are forced to question the relevance of reason, but on grounds totally different from those associated with current educational disturbances. No one seriously questions the importance of applications of mathematics, and yet we have had (and continue to have) enormous difficulties in obtaining a proper place for them in the curriculum. Why? There exists at least a possibility that a fair number of people go into mathematics precisely because they wish to hide from the real world. They conceive of mathematics as a beautiful, orderly structure that has nothing to do with life; amazingly enough, it is possible to make a living at it. If this is the case with sufficient numbers and the real source of difficulty in introducing applications into mathematics teaching, then the writer is afraid there is no hope."

1.2.2 UPPGIFTSLÖSANDE OCH DIAGNOSTISKA PROV

I flertalet typer av matematikundervisning har uppgiftslösandet haft en dominerande ställning. Det finns naturligtvis undantag, t ex vissa former av kvalificerat matematikinlärande på doktorandnivå. Men det vanliga är att det huvudsakliga inlärandet sker genom att eleven arbetar med uppgifter. Lika dominerande är uppgiftslösandet som evalueringsform. Se sid 73.

I svensk matematikundervisning har uppgiftslösandet haft en särskilt stark ställning. I Danmark och Norge är redan situationen ganska annorlunda. Se Nordisk Skolmatematik (1967). Svensk realskoleundervisning karikerades genom berättelsen från en klass där en ny termin inleddes av matematikläraren genom att han sa: Nästa! Då visste eleverna vem som skulle gå fram till tavlan och vilken uppgift som skulle räknas. Denna karikatyr är inte så orimlig. I själva verket kunde upp till 95 % av tiden på matematiklektionen avse uppgiftslösning på tavlan. Resten av tiden bestod av korta genomgångar och praktiska upplysningar. Uppenbarligen kan man uppnå majoriteten av målen med matematikundervisningen genom att lösa uppgifter.

Delmålen och uppgiftslösandet

Jag ska närmast skärskåda de fem delmålen från sid 27 och se i vilken utsträckning de kan uppfyllas genom uppgiftslösning.

A. Räknefärdighet

Detta delmål uppnår man bäst genom uppgiftslösning, dvs övningsräkning. Erfarenheter visar att det behövs en mycket omfattande träning för flertalet elever. För att nå framgång behöver eleverna såväl öva på uppgifter av högre komplexitet än som avses i målet som överträna sådana uppgifter, dvs arbeta mer med dem än som förefaller behövas för stunden.

Ska resultaten vara bestående fordras överträning. Det gäller att hitta metoder som gör eleverna beredda att lägga ner så mycket arbete. Uppgiftslösandet är en sådan beprövad metod. Det finns i allmänhet möjlighet att variera uppgifterna så att intresset kan hållas vid liv. Det har förekommit försök med att ersätta uppgiftslösandet med andra metoder, t ex att låta eleverna arbeta med små projekt som eleverna själva styr. Det kan t ex röra sig om att jämföra priser på olika varor vilket skulle ge stor numerisk träning eller som i den så kallade Cambridge-rapporten (1963) konstruera sin egen logaritmtabell. Erfarenheterna är inte odelat positiva. Det förefaller som om eleverna inte får tillräcklig färdighetsträning utan de ledsnar i allmänhet för fort.

B. Begreppsförståelse

Detta delmål kan också tränas genom uppgiftlösning men då företrädesvis mer kvalificerad sådan. Uppgifter som eleverna uppfattar som enkla stärker sällan begreppsförståelsen. Eleverna löser sådana uppgifter genom att använda tillvägagångssätt de använt tidigare och egenskaperna hos de ingående begreppen belyses i ringa utsträckning. Endast de mest fundamentala begreppen stärks genom enkla uppgifter.

C. Metodkännedom

Sedan en elev fått kännedom om en metod tränar han/hon den och fördjupar förståelsen för den genom uppgiftslösning. Ofta kan också metoden introduceras och motiveras genom att läraren utgår från en uppgift vars lösning kräver den metod som avses.

Det finns i matematiken ett stort antal användbara metoder att lära sig. Jämfört med andra (skol-) ämnen intar matematiken av detta skäl en särställning. Det finns också till skillnad från flertalet andra ämnen en tradition att matematikelever ska lära sig använda metoderna. Det är därvid uppgiftslösandet kommer in.

D. Problemlösningsförmåga

Helt naturligt övas problemlösningsförmågan genom uppgiftslösning. Det går lätt att hitta både relativt enkla och mycket svåra uppgifter. Det är däremot svårt att hitta lämpliga "öppna" uppgifter, som utmärks av att det som efterfrågas ej är angivet eller mycket vagt preciserat.

I matematikundervisningen hade tidigare problemlösningen en starkare ställning, bl a inom den klassiska geometrin.

Det råder delade meningar om i vilken utsträckning träning att lösa problem har positiva effekter för de andra delmålen. Det finns naturligtvis typer av problem som nästan uteslutande är självändamål. Den enda konsekvensen det får är att eleverna blir bättre att lösa liknande problem. Eventuellt får eleverna en viss logisk träning. Oftast övas också räknefärdighten men värdet av detta är inte så stort eftersom de elever som är kapabla - och därmed intresserade av - att lösa mer kvalificerade problem ofta inte har behov av ytterligare räkneträning. Det finns emellertid typer av problem som också stärker begreppsförståelsen och metodkännedomen. För att lösa ett svårare problem fordras ofta att eleven noga penetrerar alla förutsättningar och ingående begrepp. Eleven "vänder och vrider" på problemet ur olika delaspekter och fördjupar därmed förståelsen för de ingående begreppen. Detta kan leda till att eleven får upp ögonen för egenskaper hos begreppen som han/hon förut inte tänkt på. Det spikinriktade problemlösandet leder på detta sätt över till skruvinlärning.

E. Tillämpningsförmåga

Tillämpningsförmågan stärks självklart genom uppgiftslösning. Denna löper dock risk att bli ganska schabloniserad. I de flesta fall är den matematiska modell som ska användas i en uppgift given eller underförstådd. Det är alltså mycket svårt att träna eleverna i modellval och modellbyggeri.

För att få goda förutsättningar till att träna tillämpning är det angeläget att eleven är mycket väl insatt i det ämnesområde som en tillämpning avser. Det fordrar antingen att området är mycket vardagsnära eller att det beskrivs ingående. Båda kraven begränsar valet starkt. Bl a får texten i uppgifterna inte göras för lång. Jag hänvisar till en diskussion om tillämpningar på sid 67 ff.

Jag ska i det följande sammanfatta några för- och nackdelar med uppgiftslösande som inlärningsform av matematik.

Fördelar

+ Det är en aktiv inlärningsform. Läraren (läroboken) kan introducera en matematisk teori i form av ett problem att lösa. Det verkar tankeaktiverande. När en metod genomgåtts kan eleverna omedelbart pröva om de kan metoden genom att lösa uppgifterna där metoden används. Denna återkoppling är pedagogiskt mycket värdefull.

+ Matematikinlärandet kan uppdelas i små steg. För varje uppgift kan eleven i facit kontrollera att han/hon gjort rätt och därigenom få en uppmuntran. Det går lätt att följa en elevs studieframsteg.

+ Variationsmöjligheterna är enorma.

+ Just i matematik går uppgifter att formulera mycket kort. Lässvårigheter minimieras.

+ Elever försöker ibland gå genvägar vid inlärande. De lär sig besvärliga partier utantill utan att förstå dem. De förlitar sig på minnet inför ett prov och bryr sig inte om att lära sig en metod ordentligt. Uppgifter klarar man sällan på detta sätt. För att kunna lösa en uppgift krävs ett mer fördjupat kunnande. Uppgiftslösning är därmed en effektiv inlärningsform.

+ Nästan alltid går det att säga om en uppgift är rätt löst eller ej. Detta ger en trygghet åt arbetet.

+ Flertalet elever uppskattar uppgiftslösandet som inlärningsform.

Nackdelar

- Ett matematikinlärande bara inriktat på uppgiftslösande blir lätt stereotypt. Samma mönster upprepas hela tiden. Eleverna vänjer sig vid att det alltid ska finnas en lösning till en problemsituation och att lösningen är entydigt bestämd.

- De delar av målet som inte kan nås genom uppgiftslösning kommer i bakgrunden, oavsett om de är centrala eller ej. Omvänt sker överträning på saker som lätt låter sig formuleras i uppgiftsform.

- Vissa uppgiftstyper utgör egenändamål och arbete med dem är meningslöst i inlärningshänseende.

- Uppgiftslösandet kan degenerera till lösandet av typtal som övas in mekaniskt.

- Elever, som inte kan förlika sig med ett arbetssätt som består i uppgiftslösning, tappar intresset för ämnet trots att de mycket väl skulle ha kunnat tillägna sig en avancerad matematisk begreppsapparat.

Provuppgifter

Den dominerande formen för individevaluering - och systemevaluering med för den delen - är att låta eleven skriftligen lösa uppgifter. Uppgifterna ges vanligen så att eleven arbetar under viss tidspress och de är ofta av varierande svårighetsgrad. För att bli godkänd - erhålla ett visst betyg - är det vanligtvis tillräckligt att endast en del av uppgifterna är riktigt lösta.

Jag avser närmast att analysera vilken vikt vart och ett av de fem delmålen i realiteten får genom denna typ av evaluering. Jag utnyttjar därvid den genomgång av uppgiftslösning kontra delmål som just genomförts ovan.

A. Räknefärdighet

De flesta provuppgifter ställer krav på räknefärdighet. I allmänhet fordras att eleven kan genomföra flera räknesteg efter varandra korrekt. Till detta finns inga genvägar; man kan inte lära sig utantill och knappast "träna typtal". Sammanfattningsvis kan man konstatera att delmålet räknefärdighet spelar en viktig roll vid provuppgifter.

B. Begreppsförståelse

Jag konstaterade ovan att uppgifter som tränar begreppsförståelse i allmänhet är ganska svåra. Som prov för det mesta är konstruerade kan man klara dem utan att klara "svårare" uppgifter. Det betyder att begreppsförståelse inte är ett delmål som läggs stor vikt vid i samband med provuppgifter. Man få då undanta de helt fundamentala begreppen, som eleverna arbetat med under flera års matematikundervisning före provtillfället. De kännetecknas av att de behövs för den grundläggande räknefärdigheten och den har eleverna i allmänhet tillägnat sig.

C. Metodkännedom

Metodkännedom provas ordentligt genom provuppgifter. Det finns dock vissa möjligheter att "simulera kunnande" genom att eleverna tränar typuppgifter och imiterar sig fram.

D. Problemlösning

Vid flertalet prov krävs problemlösningsförmåga endast för kvalificerat resultat - överbetyg. För den elev som sikar på att nätt och jämnt klara sig blir problemlösningsförmåga inget viktigt delmål.

E. Tillämpningsförmåga

Tillämpningsförmåga krävs i allmänhet bara i standardbetonade former vid flertalet prov.

Att en elev endast behöver ha knappt hälften av uppgifterna på ett prov rätt och ändå anses ha nått ett acceptabelt kunskapsmål är en vanlig praxis. Det finns flera skäl till att denna praxis utbildats

och att det räcker med en så relativt liten andel rätt. Ett skäl är differentieringsaspekten. I och med förekomsten av svårare uppgifter i provet ger man även högpresterande ett mål att arbeta fram emot. Detta mål kan ligga på både ett kvantitativt och kvalitativt högre plan. T ex kan kvalificerad problemlösningsförmåga och en djupare begreppsförståelse ingå. Ett annat skäl avser överinlärande. Erfarenheter har visat att en elev för att behärska det egentliga målet bör utsättas för ett överinlärande, dvs arbeta för att lära sig ett mer omfattande pensum. Det är då psykologiskt lämpligt att i provet testa eleven på det som varit föremål för överinlärande trots att man ej fäster så stor vikt eller ens väntar sig att han/hon ska klara det. Ett tredje skäl är av delvis samma natur. Jag har tidigare (se sid 37) dragit slutsatsen att ett optimalt matematikinlärande dels innebär ett intensivt arbete på det egentliga kunskaps- och färdighetsmålet dels en inlärning mer av orienteringskaraktär som har den effekten att den ger det perspektiv som huvudmålet fordrar. Det är önskvärt att testa orienteringskunskaperna, vilket kan göras med de svårare uppgifterna i provet.

Det förtjänar att i sammanhanget nämna teorierna kring "mastery learning". Därvid hävdas vikten av att eleverna klarar allt i ett förelagt prov. Se sid 48. Uppenbarligen är man dock inom såväl matematikundervisningen som inom de ämnen som använder matematik relativt nöjd med nuvarande praxis att kräva knappt hälften av uppgifterna. Ett skäl härtill kan vara att även om eleverna vid provtillfället har klarat samtliga uppgifter inom ett område är det vanligt att många elever senare visar sig ha mycket bristfälliga kunskaper och inte ens klarar uppgifter som obetydligt avviker från dessa uppgifter. De kan t ex ha specialtränat provuppgifter eller har de löst uppgifterna genom att imitera sig fram. Men även glömska kan vara förklaringen. Värdet av "provdeklarerade" kunskaper är därför mycket tvivelaktigt.

Genom att elever och lärare i så hög grad lägger upp arbetet på att klara prov blir proven i hög grad målstyrande. Medvetenheten om vilka dessa "operationella" mål är borde ökas hos både matematiklärare och andra. Jag tror att man i många fall skulle komma till insikt om att man kräver mycket lite. Jag formulerar följande hypotes:

HYPOTES: En elev som knappt klarat ett (slut-) prov på en kurs har dokumenterat färdighet och förståelse på kursen före den aktuella kursen men behöver endast ha orienteringskunskaper därutöver.

Hypotesen är medvetet vagt formulerad. Sålunda skulle orden "knappt", "dokumenterat", "kursen före" och "orienteringskunskaper" behöva specificeras närmare. Ett försök att specificera skulle emellertid leda till att hypotesen ej kunde uttalas så generellt. Den måste i så fall förses med en rad förbehåll. Som den är formulerad kan den fungera som en mycket ungefärlig modell. I likhet med övriga generella modeller som jag formulerat ska jag inte heller försöka verifiera denna hypotes, bl a på grund av de svåra mätproblem som är inblandade. Jag inskränker mig till att ge en rad fakta som talar för den.

- Matematiska test givna till elever flera år efter att de lämnat skolan visar dålig kunskapsbehållning framför allt på det de studerat under de sista åren av sin skolgång.

- De flesta matematikprov ställer främst krav på räknefärdighet. Skulle man ej behärska ens räknefärdighetskraven från stadiet (kursen) före skulle man inte ha någon chans alls.

- Mottagande lärare klagar nästan alltid på att eleverna inte behärskar kursen de just läst.

- Eleverna visar genomgående stor oförmåga att tillämpa den matematikkurs de just läst. Däremot kan de bättre tillämpa tidigare kurser.

- Att man klarar saker som man nyss läst behöver inte tyda på bestående kunskap eller färdighet. Man kanske helt enkelt "minns" dem. Om man "minns" saker från tidigare kurser är det troligt att det beror på en djupare kunskap. Det kan naturligtvis vara så att sakerna från den tidigare kursen tagits upp igen och repeterats i den aktuella kursen och att det är därför man minns dem. Till detta kan anföras att en sådan repetition innebär ett utmärkt sätt att befästa kunskaper, vilket i alla fall talar för hypotesen.

Hypotesen knyter an till min tidigare framförda uppfattning att endast kunskaper som man är säker på är av större värde. Se sid 36. Hypotesen får också ett visst stöd av Urban Dahllöfs (1967) undersökningar i differentieringsfrågan, där han konstaterade att de använda proven i hög grad provade kunskaper från lägre årskurser.

Jag vill genom hypotesen inte hävda att kunskapsbehållningen i matematik skulle vara sämre än i andra ämnen. Tvärtom tror jag att den är än sämre i flertalet andra ämnen. Genom att matematikundervisning sker så mycket i form av uppgiftslösande, där eleverna hela tiden använder sina tidigare kunskaper och genom att matematiken är så hierarkisk, lär sig eleverna en hel del.

Diagnostiska prov

Vid diskussioner om hur undervisning ska bedrivas på effektivaste sätt betonas ofta värdet av en fortlöpande diagnostisering (formativ evaluering) av hur kunskapsinhämtandet fortskrider. Det gäller såväl undervisning i matematik som i andra ämnen. Det framhålls att man efter ett kursavsnitt bör anordna ett diagnostiskt prov som visar om eleven på ett tillfredsställande sätt tillägnat sig de kunskaper som kursavsnittet avsågs förmedla. Vid sådana diagnostiska prov gör det inget om s k "tak"- eller "botteneffekter" erhålls. Visar en elev att han/hon tillägnat sig alla uppgifter så kan man vara nöjd - målet med avsnittet är uppnått. Provet ska ju inte användas för att rangordna elever och inte heller för att testa mer kvalificerade kunskaper och färdigheter av mer övergripande natur.

Efter ett diagnostiskt prov bör en uppföljning ske antingen arrangerad av läraren eller den inlärande själv. De brister som konstateras vid provet ska i görligaste mån avhjälpas. Eleven arbetar ytterligare

en tid med kursavsnittet innan han/hon går vidare. Läraren gör särskilda genomgångar med eleven för att förklara och ställa till rätta missförstånd som kan ha uppstått. Eleven kan förväntas vara särskilt mottaglig för en sådan återkopplande diskussion efter ett diagnostiskt prov, eftersom han/hon då fått brister påpekade. Den s k PSI-metoden (Personalized System of Instruction), som används vid universitetsundervisning, har satt denna mottaglighet i system och låtit en sådan återkoppling bli ett av de viktigaste inslagen i undervisningen.

Läromedelssystem i matematik på olika stadier innehåller numera ofta diagnostiska prov av olika typer och det blir allt vanligare att läraren försöker organisera en uppföljning - återkoppling. Det har i Sverige för lägre skolstadier framtagits ett särskilt diagnostiseringspaket i matematik.

Utvecklingen av användningen av diagnostiska prov i matematik har emellertid inte gått som man hoppades under undervisningsteknologins glansdagar på 60-talet. Framför allt har det visat sig svårt att få en tillfredsställande uppföljning. Nedan anges några skäl härför.

- Det är inte lätt av praktiska skäl att i en större klass eller undervisningsgrupp organisera uppföljningen. Vissa elever behöver ingen uppföljning. De måste då tilldelas andra uppgifter att arbeta med och de kanske behöver hjälp under arbetet. De övriga eleverna behöver olika typer av stöd. Det är tidsödande att få fram lämpligt material eller sådant material kanske saknas helt. Vidare räcker inte tiden till för att läraren ska hinna diskutera med elever som visar olika typer av brister. Lämpliga lokaler saknas och tidspressen är stor.

- Vid diagnostiska prov märker man att en elev gör fel på en uppgift. I allmänhet får man ingen hjälp av provet att analysera vilken orsaken kan vara till att eleven gjorde fel. Detta leder till osäkerhet vid uppföljningen. Kihlborn (1976) har påvisat att lärarna dåligt vet hur de ska hjälpa eleverna. De tenderar att använda något s k "lotsningssystem".

- Om en elev har misslyckats med några uppgifter i provet så behöver detta inte bero på att han/hon har dåligt inhämtat kursavsnittet som provet avser utan misslyckandet beror på tidigare luckor. Sådana kan vara lätta att avhjälpa men vanligtvis krävs en jätteinsats, omöjlig att genomföra efter provet.

- Att en elev gjort en uppgift rätt på provet, eller kanske fått alla uppgifter rätt, behöver inte betyda att han/hon verkligen behärskar momentet i fråga. För det första kan det visa sig att eleven har rätt på uppgiften därför att han/hon "kom ihåg" hur man gjorde. Eleven hade kanske mött en liknande uppgift alldeles innan. Det finns också olika grader av förståelse, från en huvudsakligen imitativ och associerande till en djupare, där förståelsen väl förankrats genom ett rikt nät av relationer till andra begrepp och metoder som eleven behärskar.

Det kan visa sig att den förståelse och kunskap som provet testar är för ytlig för att den ska räcka för att eleven ska kunna använda kunskaperna från det aktuella kursavsnittet i fortsättningen. Läraren - läromedelsförfattaren - drar sig ofta för att låta mer komplicerade uppgifter ingå i provet. Detta beror bl a på den gängse uppfattningen om hur ett diagnostiskt prov bör se ut, på att man inte vill blanda in för mycket som kräver kunskaper och färdigheter från tidigare kursavsnitt och skolår och på bristande insikt i vad man egentligen bör kräva efter kursavsnittet.

- Ytterligare en svårighet vid diagnostisering är att det finns rena slumpfaktorer inblandade. Vissa kunskaper och färdigheter "sitter säkert", i andra fall klarar eleven en uppgift bara ibland, t ex när den finns i lämpligt samband med andra företeelser eller när eleven har lust att anstränga sig. Sådana fluktuationer i kunskaper och färdigheter gör användningen av diagnostiska prov än mer vansklig.

- De svårigheter som är förknippade med diagnostisering och uppföljning gör att resultaten ej alltid blir de önskade. Läraren och eleven uppfattar det knappast vara värt att ägna mer omfattande tid åt dessa aktiviteter. Denna bristande tilltro gör i sin tur utbytet än sämre.

1.2.3 MATEMATIKUNDERVISNING - TEORETISK ELLER PRAKTISK

Matematikundervisning kan vara mer eller mindre teoretiskt upplagd. Definitioner, satser och deras förutsättningar kan preciseras olika noga. Bevis kan presenteras och t o m krävas. Man kan ge en komplett logisk-deduktiv uppbyggnad eller ej. Teorin kan göras allmängiltig eller vara inriktad på att lösa speciella problem. En stor formell apparat kan byggas upp. I det följande ska jag diskutera några sådana "dimensioner" hos matematikundervisningen. I varje dimension ska jag särskilja två ytterligheter, en teoretisk och dess motsats som jag kallar praktisk. Sedan diskuterar jag för- och nackdelar hos dessa ytterligheter för att avsluta med ett förslag till kompromiss.

Definitioner

Teoretisk

Alla införda begrepp definieras noggrant.

Praktisk

Nya begrepp införs i allmänhet på ett intuitivt sätt.

För- och nackdelar

Det är en fördel om eleverna får en fullständig definition om detta hjälper eleverna till en förståelse för vad begreppet innebär. Nu är det emellertid inte säkert att detta resultat uppnås. Kanske är den

fullständiga definitionen så komplicerad att den inte säger något för många elever. Det kan då vara bättre att låta eleverna arbeta med begreppet utan en fullständig definition och hoppas på att de under arbetets gång får begreppets innebörd klar för sig. Exempel på fall då detta kan vara lämpligt är begreppet "ekvation" på grundskolans högstadium samt "polynom" och "kontinuitet" i gymnasieskolan.

Definierar man polynom som

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \qquad a_j \in R \text{ för } j \in N$$

blir många elever förvirrade.

En ε-δ-definition av kontinuitet säger knappast någon elev något. I stället kan man ge exempel på kontinuerliga och diskontinuerliga funktioner samt knyta an egenskapen kontinuitet till "att kunna rita kurvan utan att lyfta pennan från papperet". Detta kan räcka som en inledning för arbetet, varefter man kan återkomma med en preciserad definition.

Det är emellertid stora fördelar att ge en precis definition när det låter sig göra enkelt. Matematik är kanske det ämne som ger störst möjligheter till exakta definitioner av nya begrepp.

Kompromiss

Fullständiga definitioner ges då de är enkla men undviks när det införda begreppet är så komplext att den fullständiga definitionen ej är till någon nytta. Under alla omständigheter bör eleverna - i formelsamling eller liknande - ha tillgång till exakta definitioner av de begrepp de arbetar med.

Satser formuleras

Teoretisk

Teorin formuleras i form av satser med noga preciserade förutsättningar.

Praktisk

Satser formuleras ej.

För- och nackdelar

Om teorin formuleras i form av satser erhålls en mycket fast och lätt överblickbar framställning. Det finns dock inget - säger vissa - som dödar intresset så mycket som en sådan framställning. Ett alternativ är att arbeta med introducerande, stimulerande exempel - helst med praktisk bakgrund - och sedan försöka komma fram till vissa allmänna principer samt till slut tillämpa dem på andra praktiska fall. Ta t ex satsen om summan av en geometrisk

talföljd. Man kan inleda med fabeln om sädeskornen på schackbrädet och som tillämpning ta upp amortering och Akilles och sköldpaddan. Mot detta kan anmärkas att en sådan uppläggning av undervisningen mycket väl kan kompletteras med att man formulerar satser. Vad gäller att precisera förutsättningar är det naturligtvis viktigt att veta under vilka villkor en sats gäller. Däremot behöver man ju inte ge de mest allmänna förutsättningarna utan nöja sig med dem man vanligen behöver. Tillämpare reagerar ofta mot matematikens sätt att noggrant precisera förutsättningar. De är vana vid att omständigheterna ger förutsättningarna så att man ej behöver orda om dem. I den praktiska situationen är det kanske självklart att en funktion är kontinuerlig eller vilken definitionsmängden är. Men just denna skillnad kräver att i matematiken förutsättningarna preciseras. De är ju ej givna som i praktiken. Erfarenheter tyder på att en sådan precisering kan göra matematiken lättillgängligare.

Kompromiss

Viktigare satser formuleras. De vanligen utnyttjade förutsättningarna för att satsen ska gälla anges.

Sammanhängande logisk-deduktiv framställning

Teoretisk

Uppläggningen är logisk-deduktiv. Alla satser bevisas. Inga luckor förekommer i framställningen.

Praktisk

Bevis förekommer sällan. Viktiga delar av teorier presenteras men utan att större vikt läggs vid deras inbördes samband.

För- och nackdelar

Det är otvivelaktigt att förståelse och retention förbättras ju bättre sammanhang eleverna kan få i det som ska läras in. Sålunda kan det vara bra att följa - och lära sig - ett bevis som förklarar varför en viss sats är sann. Men ibland gäller motsatsen. Vissa bevis är allt annat än "kongeniala" med teorin i övrigt och bidrar ej till förståelsen. Ofta väljer man ett sådant bevis för att det är kort. När teorin en gång utvecklades bevisade man det kanske på ett längre men mer upplysande sätt.

I vissa fall kan man erhålla en sammanhängande teori endast genom att ta med begrepp - eller t o m införa särskilda hjälpbegrepp - som annars ej skulle behövts av praktiska skäl. Det är att betala ett högt pris för fullständigheten och framställningen kan bli tung och svårförståelig. I stället för att vinna i förståelse har man skapat förvirring. Det har funnits lärare som infört t ex enheterna dekameter och hektometer för "att inte få några hål i sorttabellen". I samband med införandet av geometrin med 14-15-åringar har förekommit (i t ex USA) försök att basera framställningen på ett komplett axiomsystem. Detsamma gäller på högre stadier med en komplett teori

för reella tal. Vid införandet av integralbegreppet har man presenterat och bevisat alla hjälpsatser som krävs och därigenom tvingats behandla ett så komplicerat begrepp som likformig kontinuitet.

Lika chanser att misslyckas har en knapp framställning. Presenteras begreppen utan sammanhang tenderar matematikundervisningen att leda till utantillärande, vilket är ödesdigert för kunskapsbehållningen på sikt.

Tillämpare reagerar ibland mot entydighets- och existensbevis och anser att de inte behövs i en tillämpad matematik. Verkligheten är entydig och den existerar. Man glömmer då själva matematiseringsprocessen. Vad är det som säger att de förenklingar man gör vid val av modell inte är motsägelsefulla så att det inte existerar någon lösning. Eller kanske förenklingarna leder till att det är ett annat problem man löser så att entydigheten inte är trivial.

Kompromiss

Jag har just konstaterat att ytterligheter åt båda hållen leder till dålig matematikundervisning. Konsten är att hitta det rätta mellanläget. Dettas läge är beroende av den elevgrupp man har, dess mål och förutsättningar. Någon komplett logisk framställning kan dock knappast aldrig komma i fråga. Däremot kan man arbeta med lokalt deduktiva kedjor. Man utgår då från satser och förhållanden som eleverna tycker är självklara eller åtminstone ointressanta att bevisa. Sedan bevisas fundamentala satser. Särskilt intressant är det att försöka bevisa saker man inte är säker på är sanna: viktiga men förvånande satser. Dessutom bör man genomföra bevis som kan väntas väsentligt öka förståelsen för ingående begrepp och för satsens innehåll. Andra satser kan göras troliga intuitivt. En ofta mycket fruktbar metod är att ta fram motexempel som visar att förutsättningarna för en sats är nödvändiga och att satsen inte går att bevisa i detta fall.

Matematikens allmängiltighet

Teoretisk

Matematiska satser presenteras i sin mest generaliserade form, t ex n-dimensionellt i stället för 3-dimensionellt. Tillämpningar ges allmängiltigt, med bokstavsbeteckningar i stället för numeriska data.

Praktisk

Matematiken byggs upp för att på enklaste sätt ge förutsättningar att lösa för eleverna aktuella praktiska problem.

För- och nackdelar

Att bygga upp matematiken så allmängiltigt som möjligt ökar dess flexibilitet. En allmängiltig sats har fler användningsmöjligheter. Ju fler områden den kan användas inom desto mer tid spar

man; den ersätter ju fler separata satser som man annars behövt behandla. Detta gäller också pedagogiskt. Om man för att konkretisera alltid väljer en och samma typ av illustrationer hämtade från samma tillämpningsområde kan resultatet bli att eleverna inte lär sig använda metoden annat än i detta tillämpningssammanhang. Om man däremot hämtar sina konkretionsexempel från olika tillämpningsområden kan man hoppas att göra eleverna mer allsidigt förberedda. Ta t ex integralbegreppet. Det har sagts att om man alltid åskådliggör integralen som arean under en kurva och motiverar integralbegreppet på detta sätt kommer eleverna alltid att tänka sig integralen som en area och vara oförmögna att använda den i andra sammanhang. Å andra sidan kan det hävdas att en tidig, mångsidig exemplifiering verkar förvirrande och försvårar för eleverna att tillägna sig något integralbegrepp överhuvudtaget. Om man däremot koncentrerar sig på en typ av illustrationer och exemplifieringar kan begreppet förankras så fast hos eleven att det kan generaliseras och tillämpas. Dienes (1965) har diskuterat denna fråga i samband med begreppet "multiple embodiment". Först sedan eleven kan abstrahera ett begrepp och göra det oberoende av speciella tillämpningar får det full användbarhet. Denna matematikens allmängiltighet, som är ett viktigt skäl till dess stora betydelse, innebär samtidigt stora pedagogiska svårigheter. Det är svårt att tillgodogöra sig generella satser och metoder och det kan bli tråkigt. Tråkigheten kan motverkas genom rikligt med tillämpningar och genom en nyanserad problemlösning. Men tillämpningarna måste vara konkreta och intresseväckande. Numeriska data bör introduceras hela tiden. De allmänna teorierna överlämnas åt tillämpningsämnena.

Kompromiss

Här blir det verkligen fråga om att kompromissa mellan allmängiltig uppläggning, pedagogisk lättillgänglighet och god elevmotivation. Förmodligen skulle matematiksvaga grupper vinna på att direkt lära sig (t ex vänja sig genom skruvinlärande) ett visst matematikmoment i sina tillämpningssammanhang i stället för att lära sig matematikmomentet självt och få illustrerat hur det tillämpas. De kan kanske aldrig på egen hand ta det tillämpningssteg som behövs.

Formalism

Teoretisk

Formella krav upprätthålls strikt.

Praktisk

Att formalism undviks.

För- och nackdelar

En matematisk framställning vinner mycket i tillgänglighet om symbolik och beteckningar är lämpligt valda. En viktig del av matematikens styrka ligger i den symbolvärld som därigenom blir tillgänglig. Det

är viktigt att lära eleverna att hantera dess symboler. Klarheten ökar om man upprätthåller en konsekvent terminologi. Men formalism är också en fara. Den tynger och förvirrar. Det finns en risk att det egentliga innehållet döljs av det formella. För mycket tid läggs ned på de grundläggande delarna så att man inte får tillräcklig tid för de "matnyttiga" delarna. I samband med införandet av den "nya matematiken" på 60-talet gavs många exempel på denna överdrivna formalism. För många symboler och begrepp från mängdläran infördes. Flera av dem utnyttjades aldrig på ett meningsfullt sätt. Funktionsbegreppet infördes alldeles för formellt med för många olika beteckningar. Även den grundläggande geometriundervisningen blev för formell. Tiden räckte sedan inte för att utnyttja den apparat som byggts upp. Många elever tyckte matematiken blev tråkig av denna anledning.

Kompromiss

Innan en formell apparat byggs upp får man ha noga klart för sig om den behövs. Hellre bör man ligga i underkant än i överkant.

2 SVENSK MATEMATIKUNDERVISNING I GÅR OCH I DAG

I detta avsnitt behandlas den svenska matematikundervisningen. Först analyseras utvecklingen sedan 1950-talet, därefter kartläggs makthavarna inom matematikundervisningen och slutligen utnyttjas de enkäter och intervjuer som jag genomfört för att diskutera matematikundervisningen inom den högre tekniska utbildningen.

2.1 Utvecklingen sedan 1950-talet

Hur mycket matematik en person lär sig beror i hög grad på hur mycket tid vederbörande anslår till inlärandet. Hur lång tid som ägnas åt matematik i skolan är relativt lätt att bestämma men hemarbetet är svårare att överblicka. I avsnitt 2.1.1 sammanfattas data kring hemarbetets omfattning. De utnyttjas sedan i nästa avsnitt där totala tiden för matematikinlärande på 1950- och 1970-talet jämförs. Även potentialen som definierades i kapitel 1 jämförs. Slutligen görs en brett upplagd studie av utvecklingen av mål, ramar, process och resultat för de senaste decenniernas matematikundervisning.

2.1.1 HEMARBETET UNDER SKOLTIDEN

Bakgrund

Hemarbetets omfattning och inriktning spelar en mycket viktig roll i skolarbetet. Det är därför angeläget att försöka studera hur praxis förändrats under årens lopp. I samband med föreliggande projekt var jag av naturliga skäl särskilt intresserad av hemarbetet i matematik. Jag har därför gjort en genomgång av redovisningar från tidigare hemarbetstidsundersökningar. Redovisningarna innehåller emellertid nästan aldrig en uppdelning av hemarbetet på de olika ämnena. En viss information ger dock totalhemarbetstiden för samtliga ämnen. Jag redovisar två mindre hemarbetstidsundersökningar som genomförts vid Katedralskolan i Uppsala 1976 och 1977. Sedan de genomfördes fick jag information om att SÖ gjort en undersökning 1976 på N-linjen. Den sammanfattas på sid 92 - 93 och sätts i relation till Uppsalaundersökningen.

På sid 93 - 94 sammanfattas erhållna data och eventuella trender diskuteras särskilt avseende hemarbetstiden i matematik.

Hemarbetsundersökningars validitet och värde

Det har sagts att hemarbetstidsundersökningar av den typ, där man ber elever i efterhand uppge hur lång tid de arbetat, är värdelösa av flera skäl.

- Man minns inte efteråt hur lång tid man lagt ner.
- Man fäster sig mer vid graden av den trötthetskänsla man behöver övervinna när man läser läxor än den faktiska läxläsningstiden.

- Det är ointressant att veta hur lång tid som läggs ner när man inte vet med vilken effektivitet man arbetar.

- Man försummar lätt sådan tid man lägger ned på att samtala med kamrater om skolarbetet och ens försök att skaffa olika typer av information om skol- och hemarbete.

- Man snedvrider medvetet resultaten för att nå speciella syften som t ex att reducera omfattningen av hemarbetet i sin helhet eller i något speciellt ämne.

Från mina egna erfarenheter av att som elev fylla i "läxuppgifter" och från min tid som lärare kan jag hålla med om vissa av ovan nämnda invändningar mot metodiken men jag anser ändå att sådana undersökningar är av värde. Det gäller i högre grad vid jämförelser mellan olika ämnen, skolformer och tider än vid försök att bestämma elevers totalarbetstid. För det senare syftet har invändningarna större vikt och gör slutsatsdragningar vanskligare.

Tidigare undersökningar

Jag har försökt leta upp tidigare undersökningar som innehåller redovisningar om hemarbetstider. En ovärderlig källa har därvid visat sig vara Lena Ahlins (1968) litteraturgegenomgång av nordiska undersökningar. Jag har hämtat en del data som jag redovisar nedan ur hennes rapport och resten ur olika originalkällor.

Arbetsbördan på 1930-talet

Herlitz gjorde läsåret 1937/38 en enkätundersökning riktad till målsmän för bl a elever vid högre skolor. Genomsnittliga läxläsningstiden uppgick enligt Herlitz i realskolan till 8 - 12 h i veckan och på gymnasiet till 14 - 19 h. Flickor hade längre läxöverläsningstid. Det enskilda arbetet är ej medtaget. Det beräknades kräva 80 h i medeltal. Undersökningens utformning har kritiserats av Sjöstrand (1954) bl a för den låga svarsfrekvensen och för att de svarande kunde ha anledning att inte vara helt sanningsenliga.

Gymnasiet 1950

1950 sände Skolöverstyrelsen (1952) ut frågelistor till en fjärdedel av gymnasierna. Det insamlade materialet tyder på en veckoarbetstid för hemarbete i den högsta årskursen på cirka 20 h och i de lägre årskurserna på 10 - 15 h. Resultaten bedöms som högst osäkra.

Högre Allmänna Läroverket i Uppsala 1940 - 1958

Under 1940 - 1958 insamlades s k läxuppgifter varje år. Klassföreståndarna skötte insamlandet av de särskilda formulär som fanns. På dessa hade eleverna meddelat hur lång tid de arbetade med de olika ämnena varje dag. Medelvärdena från varje årskurs och linje publicerades sedan varje år i skolans årsredogörelse. Ur arkiverade årsredogörelser i Katedralskolans arkiv har Hans Brolin tagit fram dessa data. Tyvärr tycks det inte finnas någon statistik bevarad över hemarbetstidens fördelning på de olika ämnena och dagarna.

Vi har talat med några lärare som tjänstgjorde vid Katedralskolan under denna tid och enligt vad de kunde minnas lämnade alla in blanketterna. Data avsåg, så vitt vi vet, en lämpligt vald arbetsvecka under läsåret och förutsattes inkludera även förberedelsearbete för skrivningar och andra extrainsatser. Den allmänna uppfattningen var att de inlämnade uppgifterna var ytterst ungefärliga och att de kunde innehålla systematiska fel. Bl a så kan eleverna ha velat ge lärarna - och då främst klassföreståndaren - en viss styrd uppfattning om sin egen arbetsprestation och antingen gjort en förskjutning mellan ämnen eller genomgående angivit för höga eller låga tider. Eftersom uppgifterna publicerades i årsredogörelsen tillmätte man dem uppenbarligen ett visst värde. Om inte annat kunde de användas för relativa bedömningar genom att tiderna för olika ämnen och klasser jämfördes.

I nedanstående tabell återges medelvärden för läxläsningstiden per vecka dels för tiden 1940 - 1949 dels för tiden 1950 - 1958.

Tabell 1. Lärjungarnas hemarbete (h/vecka) vid Högre Allmänna Läroverket i Uppsala 1940 - 1958. Gymnasiet. Medelvärden och standardavvikelser över år.

Linje Årskurs	1940 - 1949	1950 - 1958
R I[4]	6,7 ± 0,9	5,4 ± 0,4
R II[4]	8,0 ± 1,3	6,5 ± 0,9
R III[4]	9,1 ± 0,9	8,0 ± 0,7
R IV[4]	10,9 ± 1,7	10,2 ± 0,8
A I[3]		6,8 ± 1,1 (1954 - 1958)
A II[3]		7,7 ± 0,9 (1955 - 1958)
A III[3]		9,5 ± 0,8 (1956 - 1958)
L I[4]	6,9 ± 0,7	6,8 ± 0,6
L II[4], L I[3]	9,7 ± 2,0	8,4 ± 1,7
L III[3], L II[3]	10,4 ± 1,2	9,3 ± 1,6
L IV[4], L III[3]	11,4 ± 1,9	9,9 ± 1,4

I mitten av 1950-talet skedde en reform av gymnasieskolan. Bl a infördes den allmänna linjen. Vi har ändå i tabellen jämfört tiderna från 1940-talet med 1950-talets i sin helhet för att få tidsberoendet bättre belyst. Det visar sig nämligen att någon påtaglig skillnad i medelvärden ej kan spåras mellan 50-talets båda hälfter. Däremot ligger tidsmedelvärdena i samtliga årskurser på real- och latinlinjen högre på 1940-talet än på 50-talet.

Vi har även räknat ut medelvärdet av hemarbetstiden i realskolan för samma tidsintervall.

Tabell 2. Lärjungarnas hemarbete vid Högre Allmänna Läroverket i Uppsala 1940 - 1958. Realskolan. Medelvärden och standardavvikelser över år.

Klass	1940 - 1949	1950 - 1958
1^5	3,7 ± 0,4	3,5 ± 0,4
2^5, 1^4	4,3 ± 0,7	3,8 ± 0,6
3^5, 2^4	4,2 ± 0,6	4,5 ± 0,7
4^5, 3^4	5,8 ± 0,8	4,8 ± 0,7
5^5, 4^4	6,5 ± 0,8	5,4 ± 0,9

Gymnasiet 1961

1960 års gymnasieutredning (1963) gjorde 1961 en undersökning som omfattade 1 400 gymnasister. För I^3, II^3 och III^3 erhölls ett medelveckotimtal för hemarbetet på 15,7, 17,3 respektive 19,6 h. Utredningen understryker de många osäkerhetsmomenten.

IEA-undersökningen (1964)

I den världsomfattande IEA-undersökningen (IEA = International Education Achievement) gjordes även mätningar av tiden för hemarbete (Husén, 1967). Datainsamlingen gjordes våren 1964. För dem som denna vår var 13 år (dvs majoriteten gick i årskurs 7) var medelhemarbetstiden i matematik 1,9 h och i alla ämnen sammanlagt 6,1 h. Antalet svarande var ca 2 100. För elever i sista årskursen på reallinjen och allmänna linjens sociala gren var medelhemarbetstiden i matematik 4,9 h/vecka och 17,0 h/vecka i alla ämnen sammanlagt. Denna del av undersökningen omfattade cirka 700 elever.

Årskurs 8 (1964/65)

I samband med utredningen om införandet av femdagarsveckan i skolan insamlade Inga-Lill Uggla (1967) vissa data om hemarbetstider i årskurs 8. Hon beräknade andelen som läste läxor mer än 1 h per dag. Denna andel uppgår till 30 - 40 %. Räknar man med att dessa elever arbetar 1 1/3 h per dag och övriga i medeltal 1/2 h erhålls en veckoarbetstid för hemarbete på cirka 4 h.

Gymnasiet i Ängelholm 1967

Studierektor Sundqvist tillfrågade 19 klasser, en del från det "nya" och en del från det "gamla" gymnasiet. Medelarbetstiden låg på samma nivå i båda och var cirka 10 h i veckan.

Lundby gymnasium i Göteborg 1967

Rektor Lundh undersökte hemarbetets omfattning i årskurs 1 i gymnasiet och fackskolan. Han fann att det tog mellan 12 och 18 h i anspråk per vecka.

N-linjens andra årskurs (1968/69)

Lena Ahlin (1973) genomförde läsåret 1968/69 en hemarbetsundersökning i tolv klasser på den naturvetenskapliga linjens andra årskurs i Göteborg. Vid denna tidpunkt hade det nya gymnasiet just startat och arbetssättet hade ännu inte hunnit stabilisera sig. Syftet med Ahlins undersökning var inte att fastställa hemarbetets absoluta omfattning utan att jämföra hur mycket olika elevgrupper arbetade. Av de publicerade resultaten förefaller hemarbetets omfattning i de berörda klasserna vara cirka 12 h i veckan.

Katedralskolan i Uppsala 1968

I mars 1968 genomfördes en undersökning av hemarbetet i första och andra årskursen av gymnasiet och fackskolan (dvs en linje som motsvarar nuvarande So-linjen). Svar erhölls från 282 elever, vilket endast var cirka hälften av eleverna. Den låga svarsfrekvensen gör att resultaten måste betraktas med största tveksamhet.

Följande mediantider erhölls för "överläsningstid" i timmar per vecka. Antalet svarande anges inom parentes.

Tabell 3. Hemarbetstider (h/vecka) från Uppsala 1968

Gymnasiet			Fackskolan		
Na 1	(31)	8,3	So 1	(12)	4,5
Ek 1	(19)	9,2	So 2	(30)	7,0
HS 1	(37)	8,6			
Na 2	(58)	12,5			
Ek 2	(31)	8,3			
Sh 2	(33)	10,2			
Hum 2	(31)	7,4			

Eleverna tillfrågades om arbetets fördelning över veckans dagar. Det kan nämnas att 30 % arbetade både lördag och söndag, att 16 % arbetade samtliga tre dagar under veckoslutet och att 11 % inte arbetade alls under veckoslutet.

Varje elev ombads ange tre ämnen som han/hon personligen upplevde som de mest tidskrävande utanför skolan. Många elever uppgav inte något ämne. Nedan anges det antal gånger det mest tidskrävande ämnet nämnts på respektive linje.

Na — Fysik (68), Matematik (36), Historia (32), Biologi (21) (endast årskurs 2)

Hum-Sh — Historia (48), Engelska (28), Matematik (27), Naturkunskap (21)

Ek — Tyska (25), Engelska (22), Företagsekonomi (21), Historia (20)

So — Historia (25), Tyska (17)

Gymnasiet i Stockholm 1972

Gun Sjöberg företog 1972 en undersökning om stockholmsgymnasisternas arbetsförhållanden. Den omfattade över 3 000 elever från andra årskursen på de 3- och 4-åriga linjerna. För N-linjen erhölls medianvärdet för hemarbetet 10 h och för T-linjen 6,5 h. Medelvärdet för N-linjen var 11 h. På N-linjen föll på veckosluten 35 % av tiden och på T-linjen 23 %.

Låg-, mellan- och högstadiet 1975

Stellan Andersson utsände 1975 en mycket omfattande enkät om grundskolans matematikundervisning till ett stort antal lärare slumpmässigt fördelade över landet. Han fick svar från cirka 300. Svarsprocenten var tyvärr otillfredsställande. Rapporten från undersökningen är vid tryckning av förevarande rapport ännu ej publicerad.

Bland frågorna i enkäten finns två om hemarbete: "Uppskatta hur lång tid genomsnittseleven använder för hemarbete (inkl hemläxor) jämfört med antalet lektioner i matematik".

Medeltalen blev följande för de tre stadierna.

Lågstadiet	9 %
Mellanstadiet	12 %
Högstadiet	14 %

Den andra frågan löd: "Uppskatta hur lång tid eleven i dag använder för ev hemläxor jämfört med antalet lektioner".

Medeltalen blev följande för de tre stadierna.

Lågstadiet	5 %
Mellanstadiet	9 %
Högstadiet	10 %

Genom att uppskatta antalet lektioner i veckan erhålls följande hemarbetstider i timmar per vecka.

Lågstadiet	0,8	varav matematik	0,2
Mellanstadiet	2,1	" "	0,4
Högstadiet	2,3	" "	0,4

Katedralskolan i Uppsala 1976 och 1977

Tillsammans med Hans Brolin och Lars Fredrik Ljungström genomförde jag två mindre hemarbetstidsundersökningar i gymnasieskolan vid Katedralskolan i Uppsala vårterminen 1976 och vårterminen 1977. Vid första tillfället fick eleverna efter påsklovet uppskatta hur lång tid de i medeltal arbetat med läxor och annat hemarbete i varje ämne under de sex veckorna mellan sportlovet och påsklovet. Den andra undersökningen omfattade veckorna 10 - 12 1977 och eleverna ombads att föra fortlöpande anteckningar om sitt hemarbete. Undersökningarnas värde nedsätts av att endast drygt hälften av eleverna lämnade in de utdelade blanketterna. Totalt deltog cirka 500 elever. En annan nackdel är att koncentrationen i tid av undersökningen gör att förekomst av centrala prov och andra större skrivningar förrycker resultaten. Detta är än mer markant i den senare undersökningen.

I tabell 4 redovisas den sammanlagda hemarbetstiden i h per vecka uppdelat på dels "hemläxor, beting etc" och "förberedelser av schemalagda skrivningar, repetitioner och andra extra insatser". Tiderna är uppdelade på de tre linjerna "sociala" (tvåårig), "naturvetenskaplig" och "humanistisk-samhällsvetenskaplig".

Tabell 4. Medelhemarbetet i h/vecka vid Katedralskolan i Uppsala 1976 och 1977

	Läxor	Extraarbete	Summa
Social linje			
1976	4,8	4,2	9,0
1977	2,5	1,0	3,5
Naturvetenskaplig linje			
1976	6,9	7,9	14,8
1977	4,3	5,0	9,3
Humanistisk-Samhällsvetenskapliga linjer			
1976	5,5	5,4	10,9
1977	3,6	2,7	6,3

Man slås av de väsentligt högre talen för 1976 än för 1977. Troligtvis har metoden att låta eleverna uppskatta hemarbetet i efterhand lett till att de överskattat sitt hemarbete och rättat sig mer efter veckor med mycket arbete i ett ämne. En bidragande orsak till skillnaderna kan också vara att man i det senare fallet inte får med de tider då man mer diffust sysslar med ämnet utanför skolan, som t ex vid diskussioner med kamrater.

Den naturvetenskapliga linjen är uppenbarligen mest arbetsam och den sociala minst arbetsam.

I tabell 5 är den totala tiden för hemarbete under det treåriga gymnasiet procentuellt fördelad på årskurser och läxor/extraarbete. Data för de båda undersökningstillfällena är likartade, varför endast medelvärdena för de båda tillfällena angivits. Extraarbetet var mindre 1977 på HS-linjen.

Tabell 5. Procentuell fördelning av hemarbetet i gymnasiet på årskurs och läxor/extraarbete

Årskurs	Naturvetenskaplig linje			Humanistisk-Samhällsvetenskapliga linjer		
	Läxor	Extra-arbete	Summa	Läxor	Extra-arbete	Summa
1	13%	9%	22%	14%	11%	25%
2	19%	25%	44%	21%	15%	36%
3	14%	20%	34%	18%	21%	39%
Summa	46%	54%	100%	53%	47%	100%

Man konstaterar att andelen extraarbete ökar med högre årskurs samt att den i medeltal uppgår till 50 %. Den totala arbetsbördan är lägst i första årskursen.

Av särskilt intresse att studera är hemarbetets fördelning på ämnesområden. I tabell 6 har jag gjort en procentuell uppdelning av den totala hemarbetstiden i gymnasieskolan på sju ämnesområden.

Tabell 6. Fördelning av total hemarbetstid på ämnesområden

	Språk	Svenska	So-ämnen	Matematik	No-ämnen	Special-arbete	Maskin-skrivning
Social linje							
Veckotimtal	6-12	7	15-21	6	12		4
1976	19%	7%	44%	5%	20%	-	4%
1977	18%	3%	47%	9%	21%	-	3%
Naturvetenskaplig linje							
Veckotimtal	18	9	16	15	22,5		
1976	21%	8%	24%	8%	40%	-	-
1977	13%	10%	20%	9%	44%	5%	-
Humanistisk-Samhällsvetenskapliga linjer							
Veckotimtal	33-39	10	19-26	5-11	7		
1976	38%	7%	35%	7%	13%	-	-
1977	24%	16%	37%	10%	3%	10%	-

Man konstaterar bl a följande.

- o De samhällsorienterande ämnena är arbetskrävande absolut sett och i relation till sitt timtal.
- o Samma förhållande kan konstateras avseende de naturorienterande ämnena särskilt på N-linjen.
- o Matematik och språk kräver lite hemarbete både absolut sett och i relation till sitt timtal.
- o Eleverna arbetar nästan lika mycket hemma med matematik på HS-linjerna som på N-linjen.
- o Trots att de båda undersökningarna ger så olika totalarbetstid är den relativa fördelningen ämnena emellan mycket likartad.

N-linjen enligt SÖ 1977

Skolöverstyrelsen (1977) lät genom sina gymnasieinspektörer "några klasser varje vecka besvara ett frågeformulär angående hemarbetstiden", vari även förberedelse för skrivningar ingår. Totalt deltog cirka 1 600 elever. Hemarbetstiderna framgår av tabell 7. Det ursprungliga materialet är uppdelat på pojkar och flickor. De senare har längre hemarbetstider. Som en jämförelse har data från Uppsala-undersökningen 1976-77 återgivits.

Tabell 7. Hemarbetstider på N-linjen (h/vecka) enligt SÖ-undersökning 1976 och Uppsala-undersökning 1976-77

Årskurs	SÖ 1976	Uppsala 1976	Uppsala 1977
1	8,0	11,3	6,2
2	10,1	18,2	13,6
3	10,4	16,8	9,9

Man ser att Uppsala-undersökningen av 1977 är närmast jämförbar med SÖ:s data.

I tabell 8 ges den procentuella fördelningen på ämnesområden av totalhemarbetstiden på den treåriga N-linjen. Därvid jämförs SÖ:s data från 1976 med medelvärdet av den procentuella fördelning som erhölls i Uppsala 1976 och 1977. Jämför med tabell 6.

Tabell 8. Procentuell fördelning på ämnesområden av hemarbetstid på N-linjen

	SÖ 1976	Uppsala 1976-77
Språk	20%	17%
Svenska	8%	9%
So-ämnen	19%	22%
Matematik	21%	9%
No-ämnen	33%	42%
Specialarbete	-	5%

Överensstämmelsen är god vad gäller språk, svenska och samhällsämnen. Däremot kräver matematiken mycket liten tid i Uppsala jämfört med i landet i övrigt och de naturvetenskapliga ämnena motsvarande mer. Enligt SÖ-undersökningen är förhållandena mellan ämnenas timtal och deras hemarbetstid ungefär lika mellan de olika ämnena.

Analys

Hemarbetstider under 40 år

I tabell 9 har vi för översikts skull sammanställt de hemarbetsdata som presenterats i det föregående. Samtliga data avser timmar per vecka.

Tabell 9. Hemarbetstider i h/vecka enligt olika undersökningar

Undersökning	Realskola/ Högstadium	Gymnasiet Ospec	Real-/ N-linje	Övriga 3-åriga linjer
Herlitz 1937/38	8 - 12	14 - 19		
SÖ 1950		10 - 20		
Uppsala 1940-50	4 - 6		7 - 11	7 - 11 (L)
Uppsala 1950-58	3 - 5		5 - 10	7 - 10 (AL)
Gymnasieutredningen 1961		16 - 20		
IEA 1964	6 (åk 7)		17 (åk 2)	
Femdagarsvecka 1964/65	4			
Ängelholm 1967		10		
Lundby 1967		12 - 18 (åk 1)		
Ahlin 1968/69			12 (åk 2)	
Uppsala 1968			8 - 12 (åk 1-2)	9 - 10 (åk 1-2)
Stockholm 1972			11 (N 2)	7 (T) 9 (HS)
Andersson 1975	2			
SÖ 1976			8 - 10	
Uppsala 1976		7 - 18	11 - 18	7 - 14 (HS)
Uppsala 1977			6 - 13	5 - 10 (HS)

Man frapperas av de stora variationerna. De orsakas framför allt av att undersökningarna lagts upp på högst olika sätt. Det är t ex oklart om tiderna enbart avser läxläsning eller om de också inkluderar annat hemarbete såsom skrivningsförberedelse. Detta kan vara en anledning till de slående låga talen från "läxuppgifterna" från gymnasiet i Uppsala på 1940- och 50-talen. En annan svårighet är att hemarbetets omfattning varierar så starkt från individ till individ och från klass till klass. Särskilt det sistnämnda - som är påvisat i många undersökningar - försvårar undersökningsmetodiken. Det går knappast att spåra någon trend genom årtiondena. Det finns höga hemarbetsvärden från både 1930- och 1970-talet. Den stora IEA-undersökningen från 1964 fick också ett högt värde. Den senare gällde elever från reallinjen och allmänna linjens sociala gren. En försiktig slutsats är dock att totaltiden minskats och att arbetet förskjutits från att avse läxor till arbete som eleven pålägger sig själv.

För högstadiet/realskolan saknas uppgifter från senare år utom matematiklärarundersökningen, som var ytterst summarisk vad gäller hemarbetet.

Hemarbetet i matematik

Som ovan anförts är data angående hemarbetets fördelning mellan olika ämnen ytterst sparsamma. Det är bara IEA-undersökningen 1964, matematiklärarenkäten 1975, vår Uppsala-undersökning 1976-77 och SÖ-undersökningen 1976 som innehåller data för hemarbetet i matematik.

För realskolan/högstadiet finns IEA-undersökningen från 1964 som gav veckomedelvärdet 1,9 h i årskurs 7 och matematiklärarenkäten 1975 som gav värdet 0,4 h. Det låga talet 1975 är föga förvånande. I en enkät till tio slumpvis utvalda högstadielärare 1976 gissade dessa på en medelhemarbetstid på 0,4 h. Lärarna har kraftigt reducerat läxgivningen och många inskränker sig till att ge förslag på lämpliga uppgifter.

För N-linjen/realgymnasiet sammanfattas tillgängliga data i tabell 10.

Tabell 10. Hemarbete i matematik (h/vecka) enligt några olika undersökningar

	Hemarbete i h/vecka	Andel av total hemarbetstid
IEA-undersökningen 1964		
Åk 3 på reallinje och social gren	4,9	29%
SÖ 1976		
N 1	1,5	18%
N 2	2,4	23%
N 3	2,3	22%
Uppsala 1976-77		
N 1	1,2 - 1,5	)
N 2	0,3 - 1,2	) 9%
N 3	0,4 - 0,8	)

En förklaring till de låga värdena för matematik i Uppsala är att någon skrivning ej inföll under undersökningsperioden.

De båda Uppsala-undersökningarna 1976-77, som visade så olika total hemarbetstid, gav emellertid ganska överensstämmande relativa andelar för de olika ämnesområdena (tabell 6). Härav kan man få stöd för teorin att undersökningar om hemarbete ger ganska bra besked om varje ämnes relativa andel av totalarbetstiden. Genom den kvalificerade IEA-undersökningen erhöll man en relativ andel för matematik på 29 %. Denna andel kan därför bedömas vara ett tillförlitligt resultat och tillmätes större värde än de uppseendeväckande höga totalvärdena från denna undersökning. 1940- och 50-talens gymnasium var till sin uppläggning, t ex existens av studentexamen och underbetyg, mycket lika 60-talets. Med hänsyn härtill och till uttalanden av gymnasielärare och gymnasieelever från denna tid uppskattar jag att matematikhemarbetet omfattade cirka 30 % av den totala hemarbetstiden. Lågt räknat var denna totaltid 10 h per vecka, vilket ger en veckohemarbetstid i matematik på 3 h. Detta ska jämföras med undersökningarna från 1976-77 som ger en veckohemarbetstid på 2 h för matematik.

2.1.2 POTENTIALEN PÅ 1950- OCH 1970-TALET

Val av större matematikkurser för elever födda 1940 och 1955

Som en bakgrund till en jämförelse mellan matematikutbildningens potential på 1950- och 1970-talet har jag gjort vissa beräkningar angående hur stor del av årskullen som valde större matematikkurser på 1950- och 1970-talet. Jag har därvid utnyttjat material från SCB, Orrings (1959) undersökning och material från 1960-talets gymnasieutredning.

På 50-talet expanderade den svenska skolan kraftigt. En jämförelse mellan 50- och 70-talet skulle utfalla olika beroende på vilken del av 50-talet man väljer. För att precisera grunden för jämförelsen väljer jag därför att jämföra dem födda omkring 1940 med dem födda omkring 1955. Jag utgår från 100 personer i vart fall och följer hur de väljer i medeltal. De 1940 födda kunde välja en differentierad matematikkurs från femte eller sjunde skolåret genom att söka in i realskola/flickskola. De 1955 födda kunde välja särskild matematikkurs i årskurs 7. På gymnasiet fick man en större matematikkurs genom realgymnasiet eller det tekniska gymnasiet respektive N- eller T-linjen.

1950-talet

100	födda omkring 1940
30	började i flickskola/realskola (9 avbröt)
7	började på realgymnasium eller tekniskt gymnasium (1 avbröt)

1970-talet

100	födda omkring 1955
65	började på särskild kurs i årskurs 7 (13 bytte till allmän kurs under högstadietiden)
14	började på N- eller T-linjen (2 avbröt)

Observera att ovanstående data är oprecisa bl a beroende på osäker statistik och oklarheten om hur "kvarsittare" ska räknas. Det ger ändå en översikt över matematikutbildningens expansion.

Potentialen för matematikutbildningen på 1950-talet

På sid 57 definierade jag begreppet potential för en matematikutbildning. Det är en vägd tidssumma

$$\sum_i k_i t_i$$

där t_i är den tid som ingår i utbildning i. Matematikutbildningen tänks vara uppdelad i delutbildningar som betecknas 1, 2, 3 .... Faktorn k_i är värdet av utbildning i. Den kallas nedan

vanligtvis nivån hos utbildning i. Talet k_i är proportionellt mot matematikförmågan hos en elev vid nedre kvartilen. Koefficienten sätts till 1 i en matematikutbildning i en odifferentierad grupp svenskar. En sådan grupp svenskars matematikförmåga anses normalfördelad. Jag arbetar med två alternativa modeller där denna matematikförmåga är relativt svagt differentierad (A-modellen) och en där den är något starkare differentierad (B-modellen).

För att beräkna potentialen behöver jag data om totaltiden t_i för varje delutbildning i. Vidare behöver jag kunna följa eleven vid nedre kvartilen i utbildning i tillbaka till den odifferentierade skolan. Vilket betyg hade han/hon där? Vet jag det får jag ett mått på hans/hennes matematikförmåga och därmed kan jag uppskatta nivån k_i.

Jag följer en studiegång som består av folkskola, realskola, tekniskt gymnasium eller reallinjens matematiska gren,M-KTH.

Med hjälp av utredningar från 1950-talet och många andra källor har jag lyckats få fram data som gör att man kan uppskatta den tid som ägnades åt matematikundervisning och utbildningens nivå.

Folkskolans låg- och mellanstadium

Nivå

Under de fyra första skolåren skedde matematikundervisningen i odifferentierade klasser, varvid alltså nivåfaktorn (värdet) var 1 enligt DEFINITION 1. I de delar av landet där ingen intagning till femårig realskola skedde var undervisningen odifferentierad också i årskurserna 5 och 6.

Tid

Antalet matematiktimmar per vecka framgår av tabellen.

Årskurs	1	2	3	4	5	6
Antal	3	4	5	5	5	5

Jag utgår ifrån att varje veckotimme gav 30 undervisningstimmar.

Hemläxor förekom i viss begränsad utsträckning. Jag försummar dem i årskurserna 1 - 4 men uppskattar dem till 0,3 h per vecka i årskurserna 5 och 6.

Kvarsittning var ovanlig men förekom dock. Vanligare var att elever gick fem år i folkskolan innan de började i den femåriga realskolan. Orrings (1959) undersökning visade att 24 % av dem som började den femåriga realskolan var överåriga och 9 % underåriga. De underåriga hade i allmänhet börjat skolan ett år för

tidigt. Av de överåriga hade vissa börjat skolan ett år för sent men majoriteten hade gått fem år i skolan. Oavsett om dessa varit kvarsittare eller gått i årskurs 5 tillgodoräknar jag dem 30 % av undervisningstiden i en årskurs eller 40 timmar. Av de intagna i fyraårig realskola var 14 % överåriga. Även för dessa tillgodoräknas tid enligt samma premisser.

Sammanfattningsvis uppgår matematiktiden i folkskolan för dem som började den femåriga realskolan till 370 h och till 610 h för dem som började den fyraåriga (1 timme ≈ 3/4 h).

Realskolan

Vid 50-talets början existerade flera parallella skolformer motsvarande det nuvarande högstadiet. Det fanns fyra- och femårig realskola, sex- och sjuårig flickskola samt senare också treårig realskola. Den fyraåriga realskolan hade en praktisk del. Gymnasieelever intogs från både flickskola och realskola. Angsmark (1963) visade att framgången i gymnasiet var i stort sett oberoende av vilken realskoleform som eleven genomgått. För enkelhetens skull inskränker jag mig därför till att behandla den fyraåriga och femåriga realskolan men ej flickskolan.

Nivå

Den femåriga realskolan

Orrings (1959) ovan nämnda undersökning utgör en god källa liksom utredningar av Dahr (1945) och Bagge (1945). Nivån i den femåriga realskolans matematikundervisning skulle i vår modell enligt PREMISS 1 anges av matematikbetyget i årskurs 4 hos de elever som befanns sig vid nedre kvartilen bland de intagna till realskolan. Jag har inte kunnat få fram statistik beträffande just matematikbetyget utan endast för betygssumman i de s k kärnämnena "tal- och läsövningar", "skrivning och språklära" och "tillämpad räkning". Matematikbetyget har beräknats som en tredjedel av denna betygssumma. I Orrings utredning finns statistik som gör att jag kunnat uppskatta denna betygssumma - och alltså därmed matematikbetyget - för elever vid nedre kvartilen. Jag kommer i fortsättningen att använda poängskalan C, BC = 1, B = 2, Ba = 3, AB = 4, a, A = 5. Statistiken visar att bland elever som togs in i realskolan hade eleven vid nedre kvartilen matematikbetyget 3,7.

Genom Bagge (1945) och Dahr (1945) kan man utgå ifrån att folkskolans betygsättning i stort sett var normalfördelad. Ett material från en värnpliktsundersökning gjord i slutet av 1940-talet (Boalt-Husén, 1964) visade att betyget i räkning hade medelvärdet 3,04 och standardavvikelsen 1,0. I anvisningar anfördes att betygen skulle fördelas enligt procentsatserna 7 %, 24 %, 38 %, 24 %, 7 %, dvs den norm som senare infördes för grundskolan. Betygsnivån reglerades genom standardiserade prov. Jag utgår därför ifrån att folkskolans betyg var normalfördelade (3,1), (dvs väntevärde = 3 och standardavvikelse = 1). En elev med matematikbetyget 3,7 ligger då vid 76:e percentilen (nedifrån räknat).

Det går nu att beräkna nivåfaktorn. Ta först A-modellen. Enligt denna är matematikförmågan normalfördelad (3, 0,3). En elev vid nedre kvartilen i en odifferentierad klass har då matematikförmågan $3-0,67 \cdot 0,3 \approx 2,80$, vilket erhålls ur en tabell över normalfördelningen. En elev vid 76:e percentilen ligger 0,71 standardavvikelser över normaleleven, dvs har matematikförmågan $3+0,71 \cdot 0,3 \approx 3,21$. Jämfört med eleven vid nedre kvartilen har denne $3,21/2,80 \approx 1,15$ gånger så stor matematikförmåga. Detta tal är den nivåfaktor vi söker. Enligt A-modellen är alltså tid nedlagd i femåriga realskolan värd 1,15 gånger så mycket som tid nedlagd i den odifferentierade skolan.

Ta sedan B-modellen. Enligt denna är matematikförmågan normalfördelad (3,1). Genom att denna fördelning överensstämmer med den vanliga femgradiga betygsskalans, blir beräkningarna enklare. En elev vid nedre kvartilen har matematikförmågan = matematikbetyget $3-0,67 \cdot 1=2,33$. Eleven vid nedre kvartilen bland dem som togs in i realskolan hade enligt ovan matematikförmågan = matematikbetyget 3,7. I förhållande till den odifferentierade skolan blir hans/hennes matematikförmåga $3,7/2,33 \approx 1,6$ gånger så stor. Enligt B-modellen är nivåfaktorn alltså 1,6.

Under realskoletiden förekom kvarsittningar och studieavbrott. Som ovan diskuterats (se sid 58) förutsätts kvarsittning inte ändra nivån. Däremot kan nivån ändras genom studieavbrotten. Enligt Orrings undersökning uppgick studieavbrotten i den femåriga realskolan till 25 % av de intagna i 1^5. Beräkningen visar att dessa studieavbrott leder till att elever vid nedre kvartilen flyttas upp till 78:de percentilen.

Den fyraåriga realskolan

Samma källor och resonemang som ovan visar att matematikbetyget för elever vid nedre kvartilen bland de intagna var 3,61. Detta betyg har en elev vid 73:dje percentilen i årskurs 6. Detta ger nivåfaktorn 1,14 (A-modellen) och 1,56 (B-modellen). 34 % avbröt studierna.

Tid

Den femåriga realskolan

Veckotimtalet i matematik i de olika årskurserna var följande.

Årskurs	1^5	2^5	3^5	4^5	5^5
Veckotimmar i matematik	4	5	3	4	4

Detta visar att det totala timantalet kan uppskattas till 580 h. Dahllöf (1967) har genomfört ett detaljerat studium av lektionstidens användning inklusive bortfallet.

Kvarsittning förekom i ganska stor utsträckning. Genom Orrings undersökning kan den uppskattas till 38 %, dvs på 100 intagningsplatser förekommer 38 kvarsittningar under de fem realskoleåren. Ett fåtal elever kan ha suttit kvar två gånger. Om vi som tidigare tillgodoräknar 30 % av timantalet ett år för en kvarsittare erhålls ett uppskattat timtillskott på 38 % · 30 % · 120 timmar = 14 timmar = 10 h. ("Timme" används här för lektion, dvs 1 timme ≈ 2/3 h.)

Hemarbete i matematik förekom i icke ringa utsträckning (jämför avsnitt 2.1.1). En försiktig uppskattning är 50 - 60 minuter per vecka, som ger ett tidstillskott på 133 h.

Extralektioner hos privatlärare förekom om än i liten utsträckning liksom att man under terminerna tog korrespondenskurser. Omfattningen är svår att uppskatta i tid och kan anses inbegripen i tiden för hemarbete enligt ovan.

Slutligen bör hänsyn tas till den tid som underkända och andra elever som kände sig svaga lade ner på ferieläsning. Orring nämner att sommaren 1958 hade de två stora korrespondensinstituten i landet tillsammans 35 000 - 40 000 elever vid högre skolor. Vidare förekom ferieskolor av olika typer. Det har visat sig svårt att nu få fram data om dessas omfattning. Jag inskränker mig därför till en grov uppskattning med hjälp av antalet underbetyg. Omkring 18 % av eleverna fick underkänt i matematik. Hälften av dessa förutsätts ha ferieläst, varvid varje elev läste fyra undervisningstimmar om dagen i fyra veckor. Genom att fyra somrar är aktuella ger det ett tidstillskott på 9 % · 4 · 20 · 4 = 29 timmar = 20 h).

Sammanlagt ger detta en tid för matematikinlärande under dem femåriga realskolan på 579 h. Tid för matematikarbete i andra skolämnen än matematik var av så ringa omfattning att den kan försummas.

Den fyraåriga realskolan

Veckotimtalet i matematik var:

Årskurs	1^4	2^4	3^4	4^4
Veckotimmar i matematik	4	3	4	4

Hemarbetet uppskattas till 1 h per vecka. Kvarsittningen var 25 %. Andelen underbetyg i matematik var 17 %. Med samma principer som vid den femåriga realskolan ger detta tiden 450 h för matematikinlärande.

Realgymnasiet

Det fanns på 50-talet såväl en fyraårig som en treårig gymnasieform. Till den fyraåriga intogs eleverna huvudsakligen från 3^4 4^7 och 4^5 och till den treåriga från 4^4, 5^7 och 5^5. Enligt Angsmarks (1963) undersökning var gymnasieformerna i stort sett likvärda. För att få den enklaste jämförelsen med det nuvarande gymnasiet väljer jag att främst studera det treåriga gymnasiet.

Nivå

Enligt Angsmark (1963) låg nedre kvartilen bland eleverna som togs in på det treåriga realgymnasiet matematikbetyget från realexamen på 3,1.

Enligt betygsstatistik som skolöverstyrelsen (1955) tog fram 1953 var betygsfördelningen i matematik i allmänna läroverk och kommunala gymnasier:

Klass	A	a	AB	Ba	B	BC	C	Medelvärde
4^5	0,2	3,5	10,0	22,2	41,4	21,0	1,7	1,15
5^5	0,9	4,6	11,1	27,2	47,2	-	9,0	1,24
3^4	0,2	4,6	11,7	22,0	40,9	18,9	1,7	1,19
4^4	0,8	6,8	15,1	29,5	39,3	-	8,5	1,33

Det är då också att observera att dessa data avser den muntliga prövningen i realexamen. Vid den skriftliga underkändes 6,8 % (5^5) respektive 7,2 % (4^4).

Utgår man från denna betygsfördelning skulle en elev med matematikbetyget 3,1 i realexamen ligga vid 66:te percentilen bland eleverna som gick ut realskolan. Räknar man sedan med hjälp av Orrings statistik "baklänges" på de elever som faktiskt gick igenom realskolan motsvarar detta en elev som ligger vid 89:de percentilen i en odifferentierad årskurs 6. Detta motsvarar ett matematikbetyg i den odifferentierade skolan på 4,23. Nivåfaktorn för det treåriga gymnasiets reallinjes första år blir då 1,21 (A-modellen) och 1,82 (B-modellen).

Räknar man på motsvarande sätt på det fyraåriga gymnasiet finner man samma nivåfaktor.

I de två högsta årskurserna i realgymnasiet var matematikundervisningen uppdelad på en matematisk och en biologisk gren. Dessa grenar hade en gemensam fysikkurs. Genom att denna fysikkurs är mycket matematisk till sin karaktär kan man använda studentbetyget i fysik för att fastställa nivåfaktorn för matematiken på matematisk gren. Det

visar sig då att en elev vid nedre kvartilen på matematisk gren befinner sig på 45:te percentilen på reallinjen i sin helhet. Detta motsvarar elever på 82:a percentilen i realskolan och 92:a percentilen i den odifferentierade skolan. Detta ger nivåfaktorn 1,22 (A-modellen) och 1,90 (B-modellen) för matematisk gren.

Tid

Antalet veckotimmar i matematik var i första årskursen 6 och på matematisk gren 7 under de båda åren. Totalt ger detta 529 undervisningstimmar. Härtill kommer 110 h för skrivningstid. Se "Sju enkäter".

Enligt Angsmarks (1963) undersökning gick 26 % av de intagna om ett år. Räknar man med att de tillgodogör sig 30 % av sitt extra år leder detta till ett tidstillskott på 26 % · 30 % · 180 h = 14 h.

Hemarbetets omfattning är svårt att uppskatta. Enligt den sammanfattning av hemarbetstidsundersökningen jag gjort (avsnitt 2.1.1) verkar uppskattningen 180 minuter per vecka inte vara för låg. Det ger ett sammanlagt tidstillskott av 3 · 3 · 30 = 225 h.

Extralektioner och korrespondenskurser inräknas i hemarbetstiden enligt ovan. Däremot ska jag uppskatta feriearbetstiden separat. Cirka 15 % var enligt Angsmark underkända i matematik. Ferieläste hälften av dessa under 100 h ger detta ett tidstillskott på 7,5 % · 2 · 100 h = 15 h. Ett visst matematikinlärande sker också genom undervisningen i fysik och kemi. Jag uppskattar att 20 % av tiden i fysik och 5 % av tiden i kemi ger tidstillskott. Det uppgår då till 68 h. Sammanlagt ger detta en tid för matematikinlärande på matematisk gren på det treåriga gymnasiet av 923 h, varav 279 h uppskattas falla på första året.

Det tekniska gymnasiet

Nivå

Av eleverna på det treåriga tekniska gymnasiet kom på 50-talet cirka 2/3 från allmän realskola och var tionde från praktiska realskola. Relativt många var vuxenstuderande. Enligt Angsmark (1963) lyckades de från praktisk realskola något bättre. Det förklaras av den teknisk-praktiska realskolans större matematikkurs. För de intagna från allmän realskola hade elever vid nedre kvartilen realexamensbetyget 3,3, vilket motsvarar 74:de percentilen. Dessa elevers matematikbetyg i den odifferentierade folkskolan låg då vid 91:a percentilen. Nivåfaktorerna blir då 1,21 (A-modellen) och 1,88 (B-modellen).

Tid

Antalet veckotimmar i matematik var 9 i första årskursen och 5 i den andra. Detta ger uppskattningsvis 390 undervisningstimmar. Härtill kommer 70 h skrivningstid. Hemarbetet uppskattas till 125 minuter i veckan, vilket ger 150 h. Andelen elever som gick om något år uppskattas enligt Norinder (1963) till 18 %. (Andelen som avbröt uppskattas till 13 %.) Kvarsittningen leder till ett tidstillskott på 8 h med samma principer som tidigare tillämpats. Ferieläsning ger ytterligare ett tidstillskott på 10 h.

Slutligen används och tränas matematik i fysik, kemi och tekniska ämnen. Jag uppskattar att 15 % av undervisningstiden i dessa ämnen avser matematikinlärande. Detta ger ett tidstillskott på 225 h.

Sammanlagt ger detta en matematiktid på 738 h.

M-KTH

Nivå

Enligt ett material från 1961 kan betyget i matematik för de antagna till M-KTH som låg vid nedre kvartilen uppskattas ligga vid 2,8. De befinner sig vid 30:de percentilen på matematisk gren, vid 50:de percentilen på realgymnasiet, vid 83:dje percentilen i realskolan, vid 93:dje percentilen i folkskolan. Detta ger nivåfaktorn 1,23 (A-modellen) och 1,93 (B-modellen).

Av de 84 studerande som intogs vid M-KTH 1961 hade 33, dvs 40 %, akademiskt betyg i matematik. Lågt räknat innebär detta att var och en av dessa arbetat med matematikinlärande i 400 h, vilket ger ett tidstillskott för antagna till M-KTH på 160 h. De räknas lämpligen med nivåfaktorn 1,23 (A-modellen) och 1,93 (B-modellen).

Tid

Tiden för matematikinlärning uppskattas vara något lägre än på 70-talet eller 1 100 h. Se "Sju enkäter".

Potentialen för matematikutbildningen på 1970-talet

Jag arbetar med studiegång bestående av grundskola med särskild kurs i matematik på högstadiet, treårig N- eller T-linje i gymnasieskolan samt M-KTH.

Grundskolan

Nivå

Studieförsening i grundskolan

Ur SCB-statistik har jag funnit följande data angående eleverna i grundskolan läsåret 1975/76.

(Tabell 11 nästa sida)

Tabell 11. Elevernas åldersfördelning i grundskolan

Klass	Normalåriga	Ett år för gamla	Ett år för unga
1	98 %	2 %	1 %
2	97 %	2 %	1 %
3	96 %	3 %	1 %
4	96 %	3 %	1 %
5	96 %	3 %	1 %
6	95 %	3 %	2 %
7	95 %	4 %	2 %
8	94 %	4 %	2 %
9	94 %	4 %	2 %

Enligt denna tabell är det försumbart få som "går om" en klass. Det vanligaste skälet till att man är ett år för ung eller för gammal är att man börjat skolan för tidigt respektive för sent. Att elever "går om" klasser försummas därför i modellen.

Uppdelning i allmän och särskild kurs i matematik i årskurs 7

Under 1975/76 läste 69 % av eleverna särskild kurs i matematik i årskurs 7. Denna andel sjönk till 66 % i årskurs 8 och till 56 % i årskurs 9 (SCB-statistik).

Från den omfattande IMU-undersökningen (Individualiserad Matematik-Undervisning) finns data från läsåret 1968/69 angående betygen i matematik i årskurs 6 uppdelade på elever som valt särskild och allmän kurs i årskurs 7. Se tabell 12.

Tabell 12. Betyg i matematik i årskurs 6 för elever som läser särskild och allmän kurs i matematik i årskurs 7

Betyg	Allmän kurs	Särskild kurs	Samtliga
1	12 %	0 %	5 %
2	50 %	7 %	23 %
3	34 %	41 %	38 %
4	4 %	36 %	24 %
5	0 %	16 %	10 %
Medel-värde	2,30	3,61	3,11
Standard-avvikelse	0,73	0,84	1,02

Man ser genom de beräknade standardavvikelserna att uppdelningen i allmän och särskild kurs leder till att spridningen i prestationsnivå klart minskar.

I en odifferentierad klass på grundskolans låg- och mellanstadium ligger den nedre kvartilen i ämnet matematik vid betyget 2,42. Jag utgår därvid från matematikbetyget som i tabellen är normalfördelat med väntevärdet 3,11 och standardavvikelsen 1,02.

Tar man dem som valt särskild kurs i årskurs 7 har elever vid nedre kvartilen medelbetyget 2,94 i årskurs 6 med nivåfaktorn 1,05 (A-modellen) respektive 1,21 (B-modellen).

Under högstadietiden byter elever mellan allmän och särskild kurs. Andelen elever som går över från allmän till särskild kurs är försumbar. Andelen elever som byter åt andra hållet är större. Jag uppskattar att 3 % av totalantalet elever i årskurs 7 lämnar särskild kurs efter årskurs 7 och att 7 % av totalantalet elever i årskurs 8 lämnar särskild kurs efter årskurs 8. Den vanligaste anledningen till sådana byten är att eleven inte lyckas så väl med matematik. Det är därför rimligt att uppskatta att dessa elevers matematikförmåga ligger relativt lågt så att hälften av dem har en förmåga under nedre kvartilen. Detta leder till att matematikförmågan för elever vid nedre kvartilen på särskild kurs ökar med 4 % under högskoletiden. Nivåfaktorn i årskurs 9 är 1,07 (A-modellen) respektive 1,27 (B-modellen). En elev vid nedre kvartilen på särskild kurs befinner sig när han/hon börjar i årskurs 7 vid 44:e percentilen bland eleverna i årskurs 6 och när han/hon går i årskurs 9 vid 48:de percentilen.

Tid

Veckotimtalet i matematik i grundskolan är följande.

Årskurs	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Veckotimmar	4	4	5	5	5	5	4	4	4

På årskurserna 1 - 6 ger detta ett totalantal av 840 undervisningstimmar. Hemarbetet i matematik försummas i årskurserna 1 - 4 och förutsätts vara 0,2 h i årskurserna 5 och 6. Detta ger en totaltid av 12 h.

Feriearbetet med matematik är i det närmaste obefintligt. Kvarsittning försummas enligt sid 104. Stödundervisning och klinikundervisning är nästan uteslutande förlagd till tid då även övriga elever arbetar med matematik, varför den inte behöver medräknas. Detta ger ett totaltimantal på 570 h i årskurserna 1 - 6.

På högstadiet uppgår antalet undervisningstimmar till 363 enligt "Sju enkäter". Hemarbetet på högstadiet uppskattas till 0,2 h per vecka. Ferieläsning och effekter av kvarsittning kan försummas liksom matematisk verksamhet i andra skolämnen. Detta ger ett totaltimantal av 260 h under högstadietiden.

Gymnasiets N- och T-linje

Nivå

Medelbetyget i alla ämnen från årskurs 9.

Data från de antagna till gymnasieskolan 1971 kan erhållas från en SCB-undersökning (1976). Den visar bl a att medelbetyget från grundskolan för elever vid nedre kvartilen var 3,65 på N-linjen och 3,26 på T-linjen. Av eleverna på N-linjen kom 96 % från 9 g, som var den gymnasieförberedande linjen i årskurs 9. På T-linjen var motsvarande andel 74 %. Ur undersökningen kan man direkt utläsa medelbetyget från grundskolan för elever vid nedre kvartilen som genomgick gymnasieskolan (årskurserna 1 - 3) utan försening och på samma linje. Detta var 3,79 på N-linjen och 3,33 på T-linjen. På N-linjen gällde detta 59 % av de antagna och på T-linjen 63 % av de antagna.

Enligt SCB-statistik från gymnasieintagningen 1975 fördelar sig de antagnas medelbetyg från årskurs 9 enligt tabell 13.

Tabell 13. Fördelning av medelbetyg i årskurs 9 hos antagna till gymnasieskolan 1975

Betygsintervall	N-linjen	T-linjen
- 2,00	0,0 %	0,0 %
2,01 - 2,40	0,1 %	0,4 %
2,41 - 2,80	0,6 %	1,7 %
2,81 - 3,20	4,0 %	12,8 %
3,21 - 3,60	8,8 %	26,5 %
3,61 - 4,00	21,6 %	32,7 %
4,01 -	65,0 %	25,8 %
Samtliga	100 %	100 %

Elever vid den nedre kvartilen har medelbetyget 3,82 vid antagning till N-linjen och 3,35 vid antagning till T-linjen.

Huvudskälet till att medelbetyget ligger högre 1975 än 1971 är att eleverna 1971 kom från 9 g, där det rådde större konkurrens om betygen i alla ämnen. 1975 konkurrerar eleverna i icke-alternativkurskuppdelade ämnen med alla elever i årskursen, varför teoretiskt lagda elever har större chans att erövra höga betyg.

Matematikbetyget i årskurs 9

Enligt statistik 1974 och 1977 från standardproven fördelades matematikbetyget i särskild kurs vid höstterminen i årskurs 9 på följande sätt.

Betyg	1	2	3	4	5
Andel 1974	4 %	20 %	38 %	29 %	9 %
Andel 1977	3 %	20 %	39 %	28 %	10 %

Skolöverstyrelsen arrangerade diagnostiska prov i bl a matematik för nyantagna i årskurs 1 på gymnasieskolan. Från detta prov insamlades resultatstatistik från ett stickprov. Därvid angavs de studerandes betyg i matematik från årskurs 9. De fördelades på följande sätt vid provet 1974.

Matematikbetyg i åk 9	Antagna till T-linjen		Antagna till N-linjen	
	Absolut	Andel	Absolut	Andel
1	2	1 %	3	1 %
2	11	6 %	14	5 %
3	63	34 %	68	22 %
4	88	47 %	147	47 %
5	23	12 %	79	25 %
Saknas	94		135	

Det finns ingen anledning att förmoda att det stora antalet elever, för vilka betyget inte angivits på blanketten, skulle förrycka resultatet. Det är ungefär lika stor andel som fattas på vardera linjen: 33 % på T-linjen och 30 % på N-linjen.

Enligt dessa data är betyget i matematik vid nedre kvartilen 3,04 på T-linjen och 3,39 på N-linjen. Median- och medelvärdena är 3,70 respektive 3,64 på T-linjen och 3,98 respektive 3,91 på N-linjen. Att matematikbetygets nedre kvartil är lägre än medelbetygets nedre kvartil beror på alternativkursuppdelningen i matematik. Inom den särskilda kursen i matematik är det större konkurrens om betygen än i ämnen som svenska och orienteringsämnen, där alla elever läser samma kurs.

En elev med ett matematikbetyg vid nedre kvartilen antagen till T-linjen har alltså i genomsnitt matematikbetyget 3,04 i årskurs 9 och betyget 3,60 i årskurs 6, vilket motsvarar den 38:de percentilen och ger nivåfaktorn 1,15 (A-modellen) och 1,50 B-modellen). För elev antagen till N-linjen vid nedre kvartilen var matematikbetyget i årskurs 6 3,97, vilket motsvarar 77:de percentilen och ger nivåfaktorn 1,15 (A-modellen) och 1,66 (B-modellen).

Studieavbrott i gymnasieskolan

Enligt Svensson (1975) var andelen studieavbrott och linjebytare på T- och N-linjen för den elevkull som gick ut grundskolan 1971 följande.

	T-linjen	N-linjen
Under och efter årskurs 1	10 %	18 %
Under och efter årskurs 2	6 %	7 %
Under och efter årskurs 3	2 %	2 %
Ej angiven tid	4 %	5 %
Totalantal elever	4 838	8 121

Fjärde året på T-linjen har ej beaktats.

De som gjorde studieavbrott fördelar sig på följande sätt avseende vad som hände efter avbrottet.

	T-linjen	N-linjen
Började igen på samma linje	21 %	31 %
Började igen på annan linje	39 %	44 %
Började igen i annan skolform	7 %	15 %
Slutade studierna	33 %	10 %

Av dem som började igen på samma linje hade 29 % varit utomlands (medeltal för samtliga gymnasielinjer).

Undersökningen ger inte besked om andelen kvarsittare. Antalet elever som går om ett helt år är försvinnande litet. Däremot förekommer det inte så sällan att man avbryter studierna vid jul eller påsk och sedan går om klassen.

Under de tre gymnasieåren tillkommer vissa elever. Det rör sig dels om elever som tidigare avbrutit på grund av studiesvårigheter dels om elever som gjort ett års utlandsvistelse eller gjort ett uppehåll av andra orsaker. Den första kategorin uppskattas till 3 % på T-linjen och 6 % på N-linjen räknat på de

antagna i årskurs 1. Dessa uppskattas ha tillbringat i medeltal en termin extra på linjen. De är alltså motsvarigheten till de tidigare kvarsittarna. De räknas enligt PREMISS 4 (sid 59) ligga vid nedre kvartilen i prestationshänseende när de återkommer. Därutöver återkommer ytterligare 1 % (T-linjen) respektive 3 % (N-linjen) som gjort uppehåll av annat skäl än studiesvårigheter. Dessa förutsätts i medeltal ha normala betyg. Nivån påverkas alltså sammanfattningsvis av att cirka 20 % på T-linjen och 30 % på N-linjen gör avbrott på grund av svårigheter med studierna. Enligt data från antagna 1971, återgivna på sid 106, hade de elever på T-linjen som gick igenom de tre första gymnasieåren utan avbrott 0,08 enheter högre medelbetyg när de började gymnasieskolan än samtliga elever i medeltal. På N-linjen var motsvarande skillnad 0,14. Man kan räkna med att matematikkunskaperna är mer utslagsgivande. Uppskattningsvis höjs därför nivån med 0,2 betygsenheter under de tre gymnasieåren.

Tid

Alla tre åren är veckotimtalet i matematik 5. N- och T-linjen har gemensam matematikkurs. Enligt "Sju enkäter" är nettotimtalet i matematik under de tre gymnasieåren på N- och T-linjen 442. Härutöver läggs tid ned för skolskrivningar. Den uppskattas till 70 h. Hemarbetet beräknas till 2 h i veckan, dvs totalt 180 h. Jämför avsnitt 2.1.1 och Skolöverstyrelsen (1977).

Kvarsittning förekommer endast i 3 % (T-linjen) och 6 % (N-linjen). Eleverna går ofta endast om en del av året. Dess inverkan försummas.

Slutligen används och tränas matematik i fysik, kemi och tekniska ämnen. Jag uppskattar att 15 % av tiden i fysik, 10 % av tiden i kemi och 15 % av tiden i tekniska ämnen avser matematikinlärande. Detta ger ett timtillskott på T-linjen med 135 h och på N-linjen med 60 h.

Sammanlagt blir tiden för matematik 656 h på T-linjen och 581 h på N-linjen.

I årskurs 4 på T-linjen används matematik i tekniska ämnen, vilket ger ett timtillskott på 120 h.

M-KTH

Nivå

Antagningsstatistik finns bl a återgiven i KTH:s verksamhetsberättelse. Statistiken visar att nedre kvartilen för antagningspoängen, som är densamma som medelbetyget från gymnasieskolan, har varierat mellan 3,0 och 3,4 hittills under 70-talet. Det lägsta värdet var 1972, då det var 3,01. Det högsta var 1976 med 3,40. Då hade emellertid betygsnormerna i matematik, fysik och kemi ändrats för N- och T-linjen så att betygen höjts för alla elever.

Jag väljer att utnyttja de antagna 1975 som jämförelseobjekt. Matematikbetygen för de antagna till M-KTH fördelade sig då på följande sätt.

Matematikbetyg från gymnasiet	2	3	4	5
Antal antagna till M-KTH	14	66	78	18

Medelbetyget var 3,52 och den nedre kvartilen låg vid 2,95.

Enligt information från skolöverstyrelsen fördelades gymnasiebetygen i matematik från gymnasiet på följande sätt.

Matematikbetyg från gymnasiet	1	2	3	4	5
Linje T	5 %	30 %	37 %	22 %	7 %
Linje N	4 %	16 %	40 %	29 %	11 %
Båda linjerna	4 %	21 %	39 %	26 %	9 %

Medelbetyget var 2,95 respektive 3,28.

Andra undersökningar har visat att de antagna från N-linjen och T-linjen har ungefär samma betyg i matematik. Antagna vid M-KTH med matematikbetyg vid nedre kvartilen, dvs 2,95, ligger vid 52:a percentilen på T-linjen och 38:de percentilen på N-linjen. Sådana elever har i båda fallen matematikbetyget 3,86 i årskurs 9, dvs de ligger vid 72:a percentilen. Detta motsvarar i sin tur 4,42 vid 88:de percentilen i årskurs 6. Nivåfaktorn för M-KTH blir då 1,18 (A-modellen) respektive 1,74 (B-modellen).

Tid

De sökande till tekniska högskolor har på sommaren fått sig tillsänt ett matematikkompendium avseende gymnasiekursen och uppmanats att arbeta med det. Enligt en mindre undersökning kan de antagna teknologerna uppskattas ha lagt ned i medeltal 15 h arbete.

Enligt "Sju enkäter" uppgår tiden för matematikinlärande under de fyra högskoleåren vid M-KTH till cirka 1 200 h.

Sammanfattning

Nedan sammanfattas de båda räkneexemplen, som alltså avser 1950- respektive 1970-talet. Alla angivna tider avser 60-minuterstimmar = h.

1950-talet

	1-4	5-6	1^5-5^5	1^4-4^4	I^3	II^3-III^3	Tekn gymn	Universitets-kompl	M-KTH
Lektionstid	366	216	416	311	136	321	345		
Läxor m m		20	133	116	90	180	150		
Kvarsittning, motsv	7	4	10	6	3	7	8		
Ferietids-arbete			20	14	5	10	10		
Andra ämnen					15	53	225		
Summa (avrundad)	370	240	580	450	250	570	740	160	1 100
Percentil för nedre kvartil	25	25	76-78	73-75	89	92	91	93	93
Nivå (A-modellen)	1	1	1,15	1,14	1,21	1,22	1,21	1,23	1,23
Potential (A-modellen)	370	240	670	510	300	700	900	200	1 350
Nivå (B-modellen)	1	1	1,69	1,66	1,82	1,90	1,88	1,93	1,93
Potential (B-modellen)	370	240	930	710	460	1 080	1 390	310	2 120

1970-talet

	1-6	7-9	T-linjen	N-linjen	Sommar	M-KTH
Lektionstid	560	242	341	341		
Läxor m m	12	18	180	180		
Andra ämnen	-	-	135	60		
Summa (avrundad)	570	260	660	580	15	1 200
Percentil för nedre kvartil	25	44-48	68-75	77-82	85	85
Nivå (A-modellen)	1	1,06	1,13	1,16	1,18	1,18
Potential (A-modellen)	570	280	750	670	20	1 400
Nivå (B-modellen)	1	1,3	1,5	1,6	1,7	1,7
Potential (B-modellen)	570	320	990	930	20	2 000

Jag avslutar med en uppställning som tillåter en jämförelse mellan 1950- och 1970-talet.

		Före gymnasiet	Före M-KTH	Efter M-KTH
1950	Tid	1 100 h	2 000 h	3 200 h
	Potential A	1 100 h	2 200 h	3 700 h
	Potential B	1 300 h	3 100 h	5 400 h
1970	Tid	830 h	1 400 h	2 600 h
	Potential A	850 h	1 600 h	3 000 h
	Potential B	900 h	1 900 h	3 900 h

För de färdiga M-ingenjörerna inföll på 1950-talet 63 % av matematikinlärandet under skoltiden mot 54 % på 1970-talet. Motsvarande andel av potentialen är 61 % respektive 53 % (A-modellen) och 57 % respektive 48 % (B-modellen).

Man konstaterar:

- Tiden för matematikinlärande har reducerats kraftigt sedan 1950-talet.
- Inlärandet sker i mer heterogena klasser.
- Tekniska högskolorna tar numera på sig en större andel av matematikinlärandet.

2.1.3 FÖRÄNDRINGAR I MÅL, RAMAR, PROCESS OCH RESULTAT

Inledning

I detta avsnitt lämnas en redogörelse för hur svensk matematikundervisning har utvecklats under de senaste decennierna. Därvid ser jag utvecklingen främst ur deras perspektiv som har behov av att lära sig mycket matematik för sin fortsatta utbildning. Först behandlas folkskolan/realskolan/grundskolan och därefter gymnasiet. Ett kort parti ägnas åt högskoleundervisningen. Avsnittet avslutas med en analys av skolmatematiken i relation till begreppen spik- och skruvinlärande, primärkunskaper samt bruks- och initiativkunskaper.

Vid en sådan redogörelse borde rimligen rön från systemanalys tillämpad på sociologi och pedagogik kunna utnyttjas. Standardverket Buckley (1967) "Sociology and Modern Systems Theory" ger emellertid föga. De jämviktsmodeller som där utvecklas visar sig inte vara praktiskt tillämpbara i detta fall. I Churchman (1973) "Systemanalys" finns följande fem punkter enligt vilka system kunde analyseras.

1 Systemets allmänna målsättning och dess prestationsmått

2 Systemets miljö

3 Systemets resurser

4 Systemets komponenter och deras aktiviteter

5 Ledningen av systemet

Denna uppdelning erinrar mycket om det inom pedagogiken - erkannerligen undervisningsteknologin - använda schemat

mål - ramar - process - resultat.

Se bl a Glaser (1962) och Lundgren (1972).

Vid försök att använda Churchmans fem punkter och det undervisningsteknologiska schemat fann jag det senare överlägset förutsatt att det kombineras med ett övergripande studium av inverkan från de grupper av personer som förutsätts leda systemet. Detta genomförs i avsnitt 2.2.

De fyra punkterna i schemat preciserar jag på följande sätt.

Mål

Det gäller det mål som finns för olika typer av matematikundervisning. Man kan därvid särskilja officiella mål formulerade i utbildningsdokument av varierande slag och andra mer inofficiella mål.

Vid en diskussion av målet för matematikundervisningen måste man också beakta målet för all undervisning i skolformen i fråga.

Ramar

Ett stort antal ramfaktorer influerar matematikundervisningen, varav de viktigaste är

- samhällets inställning till matematik och matematikundervisning
- skolsystemets uppbyggnad
- ekonomiska resurser för undervisningen
- tid använd för matematikinlärande
- elevernas förmåga och förkunskaper
- lärarna och deras kompetens och intresse.

Dessa ramar omfattar i huvudsak Churchmans båda punkter "miljö" och "resurser".

Process

Denna punkt avser hur själva undervisningen är upplagd och hur inlärandet går till. Inte minst viktiga i detta sammanhang är ämnesmetodiska aspekter liksom arbetsformerna i skolan.

Resultat

Matematikundervisningens resultat avspeglas främst i elevernas prestationer på prov men även förekomst av studieavbrott är en viktig bedömningsgrund. Ett annat kriterium avser hur matematikkunskaperna uppfattas vid studiet av andra ämnen, i yrkesliv och för vardagslivets behov.

Grundskolan

Reformer

Matematikundervisningen var relativt statisk på 1940- och 50-talet. Mål och innehåll framgår t ex av SÖ (1955 a och b). De mer omfattande reformerna av matematiken kom först på 1960-talet. En viktig reform var dock försöksverksamheten med enhetsskola (SÖ, 1959, 1960) under 1950-talet. Införande av grundskolan skedde genom Lgr 62. (Lgr = läroplan för grundskolan.) Se SÖ 1961:30 och 1961:31. Nästa reform skedde genom Lgr 69 (SÖ 1967). Under slutet av 70-talet arbetar man med en ny reform som förmodligen träder i kraft i början av 80-talet.

Mål

Målet för matematiken i den svenska obligatoriska skolan har hela tiden sagts vara att ge eleverna matematiska färdigheter och kunskaper som de behöver vid fortsatt utbildning samt i yrkes- och vardagslivet. Det har uttryckts på litet varierande sätt genom åren men grundmeningen har i stort varit densamma. I det övergripande målet för all utbildning i skolan har också hela tiden uttryckts tanken att varje elev ska ges möjlighet att förverkliga sina ambitioner och få ta del av olika yttringar av kulturlivet, osv. Sådana formuleringar gäller naturligtvis också matematikundervisningen och innebär att man ej behöver uppfatta den som enbart krasst nyttoinriktad.

Det har skett en viss omsvängning i individens behov av matematik under efterkrigstiden genom den ökade teknifieringen och professionaliseringen. Data har blivit allt viktigare. Folk läser mer böcker och tidningar. TV har inte betytt minst. På senare år har räknedosor och datorer ökat starkt i användning. Detta har lett till ett ökat behov av matematik men ett minskat behov av kunskaper i räkning. Denna omsvängning har också helt följdriktigt avspeglat sig i målet för skolans undervisning i matematik. Man räknar numera mindre med flersiffriga tal och bråkräkningen är nästan helt reducerad till räkningar med ensiffriga tal. I stället lägger man större vikt vid överslagsräkning och arbete med diagram, tabeller och formler.

Nyttoaspekten har dominerat genom åren. Ett honnörsord har varit "färdighet". Av individutvecklingen märker man inte så mycket i målformuleringar i ämnet matematik.

Den ur målsynpunkt händelserikaste reformen är den inför Lgr 69. Även då underströks färdighetsaspekten. I propositionen (Kungl Maj:t 1968) heter det bl a: "Det är sålunda naturligt ... att ... förstärka den färdighetsskapande undervisningen ...". Ändå är kanske denna reform den som relativt sett lägger minst eftertryck på färdighet. SÖ (1967) talar om behovet av "att alla elever i grundskolan får en i förhållande till dagsläget bredare matematisk kunskap". Eleverna skulle "möta" olika matematiska områden och "ges chansen" att tillägna sig kunskaper inom det. Vidare underströks kraftigt förståelse. Sålunda heter det explicit i målet: "Undervisningen skall ... grundas på förståelse" (SÖ 1969). Detta avsågs ske dels på teoretisk väg - med större tonvikt på den matematiska begreppsbildningen (mängd, relation, funktion, vektor etc) - dels på praktisk väg - genom laborativt arbete med både strukturerat och ostrukturerat material.

Dahllöf (1971) har observerat följande skillnad mellan Lgr 62 och Lgr 69.

> "I 1962 års läroplan var elevernas fostran det övergripande begreppet. I 1969 års läroplan har ordet fostran systematiskt utmönstrats. I stället talar läroplanen om personlighetsutveckling."

Detta avspeglas också i ämnet matematik. Det fanns i Lgr 69 en stark tilltro till individens möjligheter att lära sig matematik på ett förståelseinriktat sätt. Man tog avstånd från metoden att få räknefärdighet genom att drilla många likadana uppgifter. I stället skulle man genom arbete med laborativt och strukturerat material framhäva de grundläggande matematiska strukturerna. Därigenom skulle eleverna förstå hur matematiken var uppbyggd, vilket skulle leda till god räknefärdighet.

Vidare borde alla elever få en bred matematisk orientering och inte bara kämpa med att skaffa sig en elementär räknefärdighet. De skulle arbeta med statistik och få en inblick i slumpens lagar genom sannolikhetsläran. De skulle få arbeta litet med datorer och trigonometri. Alla elever skulle hantera enkla formler även om de inte var så algebraiskt skickliga. Man hade drömmen om att berika eleverna matematiskt.

Vid 1969 års reform förstärktes den matematisering av matematikundervisningen som inletts i försiktig omfattning i och med Lgr 62. Ämnet blev litet mer matematik och litet mindre räkning.

Under 1970-talet svängde emellertid pendeln tillbaka. Den matematiska inriktningen tonades ner. Slogan hette "baskunskaper" (SÖ 1973). De avsåg främst den rent numeriska räknefärdigheten. Om stämningarna från slutet av 1970-talet får dominera nästa reform kommer matematik verkligen att bli ett "räkneämne".

En genomgående trend från 1940-talet och framåt är det ökade hänsynstagandet till de lågpresterandes situation. Det märks redan i anvisningarna för realskolans matematikundervisning (SÖ 1955 b) på 1950-talet, varvid lärarna på många ställen uppmanas tänka på de lågpresterande som t ex: "Undervisningen bör därför läggas så att om möjligt ingen lärjunge tycker sig stå inför oöverkomliga svårigheter".

Det går att hitta många exempel på detta ökade hänsynstagande i utbildningsdokument och i det praktiska undervisningsarbetets uppläggning på 1960- och 70-talet. Bl a har moment flyttats till högre årskurser eller utgått. Hänsynstagandet har också kraftigt ändrat de högpresterandes situation genom att man i olika hänseenden funnit det lämpligt att inte pressa dessa elever.

Målet för matematikundervisningen på högstadiets särskilda kurs och i realskolan har hela tiden starkt influerats av gymnasieskolans krav. Det gäller särskilt de naturvetenskapliga och tekniska gymnasielinjerna. Denna inverkan var starkare förr. I realskolan hade man högt ställda krav på numerisk och algebraisk räknefärdighet. Dessa krav var klart överdimensionerade för personer som inte skaffade sig någon matematikutbildning utöver realskolan. Så sent som i läroplansöversynen inför Lgr 69 understryker man gymnasiets krav. Det heter bl a (SÖ 1967):

> "Betydande delar av vår nuvarande högstadiekurs är inriktade på att passa för det gamla gymnasiets krav. Sedan nu gymnasiets kursplan förändrats, t ex vad gäller algebra och geometri, är en därav betingad förändring av högstadiekursen motiverad."

I översynen inför 1980-talet finns det i många utbildningspolitiska kretsar önskemål om att helt frigöra grundskolans undervisning från gymnasieskolans krav.

Genom att nyttoaspekten på matematiken varit den dominerande har hela tiden vikt lagts vid tillämpningar. Även här har det skett en målförskjutning under årens lopp. I anvisningarna för realskolan (SÖ 1955) omtalas tillämpningarna som "praktiska räkneexempel". Man observerar ur vilket perspektiv det hela ses. Det är fråga om "räkneexempel". Man lämnar inte skolmatematiken. De praktiska situationer väljs som passar in i skolkursen. De faktiska tillämpade uppgifter som gavs i realskolan passar också ofta in i denna beskrivning. Det var "badkarstal" dvs uppgifter som var konstruerade för att ge tillämpning på ekvationslösning. Sådana uppgifter - som alltså innebär en problemställning som knappast kan uppstå i en praktisk situation - finns alltjämt. Men andra mer naturliga, mindre stereotypa uppgifter dominerar numera. Det vanliga är att de endast kräver en rättfram beräkning i en relativt okomplicerad situation.

Denna förskjutning av målet går hand i hand med problemlösningens minskade roll. Jag avser då inte övningsräkning i allmänhet utan situationer då eleven ställs inför ett problem som i ett eller annat hänseende är nytt för honom/henne. Denna skillnad märks klart då man jämför de provräkningar som gavs i realskolan på 1940- och 50-talet med dagens prov på högstadiet. På dagens standardprov förekommer svårare problemuppgifter endast för att särskilja högpresterande elever och undvika takeffekter. Problemknäckandet kan knappast längre sägas utgöra en del av det egentliga målet för matematikundervisningen.

Om man utnyttjar uppdelningen av målet i fem delmål kan utvecklingen sägas innebära att räknefärdigheten har förstärkt sin ställning som det dominerande målet. Metodkännedom och begreppsförståelse har fått något ökad vikt medan problemlösnings- och tillämpningsförmågan är oförändrade som relativt oviktiga delmål. Se sid 98 i "Sju enkäter".

Ramar

Samhällets inställning

Den stora förändringen under tidsperioden gäller skolväsendets utbyggnad så att i dag alla går i skola i minst nio år. Detta har kraftigt påverkat matematikundervisningen.

Den allmänna inställningen till matematik är att dess betydelse växt under de senaste decennierna. Inte minst teknologin och datatekniken har bidragit härtill. Samtidigt är det svenska samhället mindre auktoritärt nu än förr. Man ifrågasätter mer. Det gäller både skolelever, föräldragenerationen, de samhällspolitiskt medvetna grupperna och den breda allmänheten. Detta ifrågasättande har drabbat matematikundervisningen. Man accepterar inte utan vidare matematikens roll som formellt bildningsideal. Man reagerar mot förment praktiska uppgifter som är konstruerade bara för att ge träning i matematik. Man påpekar att eleverna i skolan arbetar med tal med många värdesiffror och med komplicerade bråk fast sådana tal sällan används praktiskt. Exemplen kan flerfaldigas.

Denna samhällets inställning har påverkat och skakat skolans matematikundervisning, som fått genomgå en delvis smärtsam omprövning. Detta har lett till en undervisning som har en bättre målsättning men har råkat ut för vissa pedagogiskt-metodiska defekter. Bl a förefaller man från samhällets sida ha svårt att acceptera att matematikinlärande är så tidskrävande och att ett visst mått av överinlärning behövs för att man ska uppnå bestående färdigheter.

Skolsystemets uppbyggnad

Sedan början av 1950-talet har revolutionerande förändringar skett i skolans hela organisation och av arbetssättet i skolan. De har haft stora konsekvenser för skolmatematiken, framför allt från och med årskurs 7:

- Realskolan - urvalsskolan - är borta och har ersatts med en 9-årig skola för alla.

  Detta har bl a lett till att matematikundervisningen nu ofta sker i mer heterogena grupper.

- Betygssystemet är ändrat. Underbetygen är borta. Kvarsittning förekommer inte.

Därmed har en "piska" försvunnit. Matematik var ett ämne som många riskerade att få underbetyg i. Ett underbetyg i matematik medförde inte sällan kvarsittning och ibland avgång från skolan. Detta ledde till att många elever lade ner ett stort arbete på att klara matematiken. Men det ledde också till att matematikinlärande ibland upplevdes som terror, vilket medförde avsmak för att vilja lära sig mer och kanske för att överhuvudtaget använda matematik. Att denna inställning ändrats får sägas vara en stor fördel. Å andra sidan förefaller inte skolan ha hittat någon "morot" som kompenserar frånvaron av "piskan". Resultatet har blivit att matematikinlärandet i dag tillmäts mindre vikt och bedrivs mindre intensivt än förr.

Kvarsittningen som förr var vanlig i realskolan (se avsnitt 2.2.2, sid 100) medförde att vissa elever tvingades att repetera sina kunskaper så att de fick en ny chans. Detta system tvingade emellertid också elever som var godkända i matematik att i onödan läsa om matematikkursen. Det är svårt att avgöra om dagens system är till för- eller nackdel för matematikinlärandet. Att dagens system är fördelaktigare från social synpunkt är klart. Men förmodligen har det medverkat till att ytterligare öka kunskapsspridningen inom klasserna och lett till ett ökat antal studieavbrott och kurs(linje)-byten.

- Alla grundskoleelever läser matematik i nio år.

Denna ändring påverkar matematikinlärandet i 13 - 15-årsåldern. Uppenbara och ofta påtalade svårigheter föreligger i dag att ge de elevgrupper som har ringa intresse för och behov av matematik en meningsfull inlärningssituation, särskilt som vanligtvis dessa elever brottas med stora svårigheter med ämnet. Detta har lett till att den allmänna kursen i matematik fungerar mindre väl. I normalklasserna som läser särskild kurs i matematik är eleverna också mycket spridda prestationsmässigt, vilket inneburit stora svårigheter att hitta lämpliga arbetsformer.

- Realexamen har avskaffats.

Med den syn på skolan som delas av en mycket stor majoritet i Sverige är en examen - åtminstone av så teoretisk karaktär som realexamen - i den obligatoriska skolan en orimlighet. Man kan emellertid konstatera att existensen av en examen hade kunskapsbefrämjande effekter i ett sådant ämne som matematik. Elever och lärare fick genom examen ett gemensamt mål för sitt arbete och många elever lade ner ett stort arbete på att förbereda det skriftliga provet i examen. Inte minst viktig i retentionshänseende är den samlade repetition som en examen innebär.

- Läxläsningen har minskat.

I avsnitt 2.1.1 diskuteras hemarbetet. Därav framgår att läxläsningen i matematik har reducerats kraftigt. Detta har bl a haft den konsekvensen att det arbete, som eleverna lade ner hemma, i stället måste förläggas till lektionstid.

- Tiden för matematikinlärande har minskats.

  Enligt avsnitt 2.1.2 arbetade elever som läste matematik i nio år på 1950-talet ca 970 h med matematik mot ca 830 h på 1970-talet. Tar man hänsyn till den nivå på vilken arbetet bedrivs erhålls jämförelsetalen 1 300 respektive 800. En elev som ska vidare till gymnasieskolans NT-linjer har alltså en betydligt lägre matematisk potential än elever i motsvarande situation på 1950-talet.

Ekonomiska resurser

Matematikundervisningen för ungdomar i åldern 7 - 15 år har fått förstärkta resurser. Att alla elever nu läser matematik i nio år har krävt stora lärarresurser. Den genomsnittliga klasstorleken har minskat något. Klinik- och specialundervisning har byggts ut. Läromedlen är mer omfattande och nyanserade. Utrustningen för laborativ verksamhet har starkt förbättrats.

Lärarna

Generellt kan sägas att utbildningen av svenska lärare inte lagt särskilt stor vikt vid matematik. Enligt IEA-undersökningen (Husén,1967) har de svenska ämneslärarna relativt lång yrkesutbildning bakom sig. De har emellertid ofta utbildning i tre ämnen och har i allmänhet bara ägnat 1/2 - 1 år åt matematikstudier på högskolenivå. Situationen under 1950- och 1960-talet karakteriserades av en stark lärarbrist. Matematikundervisningen för 13-15-åringar upprätthölls ofta av lärare med kort eller ingen utbildning i matematik.

Klasslärarna på låg- och mellanstadiet har fått sin teoretiska matematikutbildning huvudsakligen i grundskola/realskola och gymnasium. Endast en mycket liten del har de från seminarium/lärarhögskola. Lärare med erfarenhet från klasslärarutbildning från 1940-talet till 1970-talet har upplevt fluktuationer i lärarkandidaternas matematikkunskaper beroende på rekryteringsläge och kursplaneändringar men rapporterar ingen kraftigare trend. Under 1970-talet har lärarutbildningen i matematik lidit av det reducerade matematikinlärandet i skolan.

Klasslärarutbildningen har hela tiden haft en humanistisk-samhällsvetenskaplig slagsida. Matematik och naturvetenskap har kommit i andra hand. Flera faktorer har bidragit härtill. På lågstadiet dominerar kvinnorna helt utbildningen och även på mellanstadiet har de utgjort en stor andel. Genom vårt kulturmönster har kvinnorna ett lägre intresse för naturvetenskap-teknik-matematik än männen. Detta har avspeglat sig i deras lärarutbildning och i deras aktiva lärargärning. Även män som väljer klasslärayrket är ofta mindre intresserade av naturvetenskap-teknik-matematik. I annat fall hade de ofta valt den mer välbetalda ingenjörsbanan.

Även metodiskt har klasslärarnas intresse för matematiken varit relativt lågt. Se vidare sid 121.

Process

Vad har hänt med kursinnehåll och arbetsformer i matematik sedan 1950-talet?

Kursinnehållet

På låg- och mellanstadiet visar ett studium av läroplaner, läromedel och prov samt samtal med lärare att bl a följande förändringar skett.

- Sifferräkningarnas komplexitet har minskat.

  Tidigare räknade man mycket mer med tal med många värdesiffror. Framför allt tränade man komplicerad algoritm-räkning.

- Bråkräkningen har förenklats.

  Tidigare arbetade man mycket med bråk där täljare och nämnare var större än 10. Förkortningar och förlängningar övades flitigt. Eleverna tränades att bilda MGN till tal som 18, 24 och 32 genom faktoruppdelning.

  Numera arbetar man bara med mycket enkla bråk och inlärandet har i mycket förskjutits upp på högstadet.

- Överslagsräkningen har förstärkts.

  Elevernas kunskaper i överslagsräkning provas numera i standardprov.

- Det arbetas mer med tabeller, diagram och statistik.

- Problemlösningen har minskat något till förmån för mer förutsättningslösa tillämpningar.

  Tidigare dominerades läroböckernas tillämpningar av en sorts skolboksvärld. I dag avspeglar de samhället på ett bredare sätt.

Genom Lgr 69 fördes det in en del nya moment som t ex mängdlära, negativa tal, koordinatsystem och vissa geometriska moment. Dessa har redan reducerats i omfattning. Det är ännu för tidigt att yttra sig om deras ställning på sikt. Även under den intensivaste nyordningen i början på 1970-talet tog sådana moment mycket liten tid i anspråk jämfört med den tid som ägnas år räkneträning. En nyhet som kan få mycket stora konsekvenser för mellanstadiets undervisning är införandet av räknedosor.

På högstadiet - realskolan framgår huvudtendenserna av "Sju enkäter", sid 92 - 98.

Arbetsformer

På låg- och mellanstadiet har matematikundervisningen blivit mindre abstrakt. Laborativa material används mer och i läromedlen finns olika typer av förklarande illustrationer i större utsträckning. T ex används tallinjen mycket mer. Undervisningen har därigenom blivit mer varierad. Till detta bidrar det ökade utbudet av tillämpningsuppgifter.

Jämfört med i många andra ämnen har dock metodiken förändrats relativt litet. Det sammanhänger delvis med lärarkårens större humanistiskt-samhällsvetenskapliga inriktning. I orienteringsämnen och svenska har arbetsformerna förändrats mer, t ex är grupparbete vanligt. Utvecklingen är i dessa ämnen mer dynamisk och lärarna lägger ofta ner ett omfattande planeringsarbete. Tiden har inte räckt till för lärarna att ägna sig åt matematiken i samma grad. En lektion i matematik planeras ofta inte så noggrant utan man "fortsätter där man var".

Provräkningarnas betydelse har tonats ner - bl a beroende på den minskade betygsättningen - och de diagnostiska proven har blivit allmänt använda. Se vidare avsnitt 1.2.2.

På högstadiet har förmodligen arbetsformerna ändrats mer. En kraftig ändring i hur man disponerar lektionstiden har skett till förmån för individuellt arbete. Detta har bl a förorsakats av det minskade hemarbetet och den sämre arbetsdisciplinen. Det tidigare vanliga arbetssättet att en elev räknade en uppgift på tavlan under lärarens överinseende medan resten av eleverna skrev i sina böcker är numera sällsynt. En sådan "schavottering vid svarta tavlan" uppfattades också av många elever som mycket obehaglig. Denna utveckling har bl a orsakats av att eleverna är mer spridda i prestationshänseende. Klagomål mot dominansen av tyst räkning har uppstått genom att eleverna blivit sämre i att "tala matematik". En annan konsekvens är att svårare problem undviks. "Tyst räkning" fungerar helt enkelt inte om problemen är för svåra. Det krävs för mycket lärarhjälp. En minoritet elever kunde på realskoletiden under en erfaren lärares ledning tränas att lösa relativt komplicerade problem med hjälp av den gängse elev-vid-tavlan-metoden. Men för många elever ledde metoden till passivitet och de tillgodogjorde sig föga.

Användning av diagnostiska prov har ökat kraftigt medan provräkningarna tonats ner.

Arbetsmetoderna har kanske förändrats mest inom geometrin. Stor möda lades i realskolan ner på den deduktiva geometrin. Bl a fick eleverna bevis av viktiga satser i läxa. De deduktiva resonemangen orsakade stora svårigheter och reducerades successivt, framför allt genom införandet av avbildningsgeometrin - speglingar, vridningar, parallellförskjutningar - i Lgr 69. Genom avbildningsgeometrin blev det svårt att genomföra begränsade beviskedjor. Överhuvudtaget förefaller lärarna ha svårt att använda avbildningsgeometrin på ett metodiskt lämpligt sätt. Majoriteten av lärarna förefaller vilja ha bort den. Geometrin har i stället kommit att domineras av en mätgeometri med beräkningar av omkrets, area och volymer.

Differentieringsfrågor

Redan i slutet av realskoletiden fanns det möjligheter att välja en lättare kurs i matematik. I enhetsskolan fanns det två kurser i matematik på högstadiet.

I grundskolan finns också två kurser kallade allmän kurs (den mindre) och särskild kurs. På senare år har cirka 2/3 av eleverna valt särskild kurs. Den har ett klart bredare elevunderlag än realskolan. Se vidare sid 96.

På mitten av 1960-talet fanns det stora IMU-projektet. Inom det arbetade man utan kursuppdelning. Eleverna arbetade i huvudsak självständigt med ett material i flera nivåer. Arbetet skedde vanligtvis i storklass, varifrån homogenare elevgrupper kunde bildas för gruppundervisning (Larsson,1972). Utvärderingen av projektet visade att eleverna nådde ungefär samma resultat som vid traditionell undervisning. Dock föreföll lågpresterande att missgynnas.

Erfarenheterna från IMU-projektet föranledde SÖ att i läroplansöversynen (SÖ,1967) föreslå att uppdelningen i allmän och särskild kurs skulle slopas. Regeringen motsatte sig emellertid detta och uppdelningen bestod. Lärarnas Riksförbund motsatte sig sammanslagningen, bl a för att de var oroliga för att lärare skulle ersättas med läromedel. Dessa farhågor var berättigade och en av IMU-projektets svaga punkter var dess dåliga utnyttjande av lärarnas kapacitet. IMU-materialet var ganska dyrt i drift och när myndigheterna inte längre tillät att viss del av medel avsatta för lärarlöner i stället fick utnyttjas för materialkostnaderna kom materialet att sluta användas. En annan nackdel med materialet var att det representerade den första vågen av material som följde den nya matematiken och var därför alltför formellt och abstrakt.

Under 1970-talet har man sålunda på högstadiet arbetat med en alternativ kursuppdelning. Den har inte fungerat tillfredsställande och man har haft stora svårigheter att hitta lämpliga uppläggningar av undervisningar i såväl allmän som särskild kurs. Se sid 118. Viss försöksverksamhet har förekommit med sammanhållna klasser men problemen har varit stora och någon tillfredsställande lösning har man inte funnit.

Resultat

Magne (1975) anför:

> "När vi ser tillbaka på de senaste femtio åren har vi ingen anledning att prisa skolan och fröjda oss över inlärningsresultaten i matematik."
>
> "Dessa iakttagelser är inte på något sätt någon unik svensk företeelse. Vi konstaterar samma klagomål över hela världen. De kan uttryckas sålunda: Eleverna i den obligatoriska skolan lyckas inte nå de kunskapsmål som lärarna väntar sig."
>
> "Jag vill presentera den uppfattningen att de svenska matematikkunskaperna var svaga på 1960-talet och alltjämt är svaga."

Magne gör sig därmed till tolk för en vanlig uppfattning: "Utbytet av matematikundervisningen är ringa med hänsyn till all ansträngning och alla resurser som läggs ned". Detta gäller särskilt den obligatoriska skolans undervisning.

Det finns många rapporter om genomförda matematiktest med olika individgrupper, som visar på låga lösningsfrekvenser även på enkla uppgifter. Ganska belysande är en stort upplagd undersökning som SÖ, SCB och Socialstyrelsen initierade i början av 1970-talet för att undersöka folks matematikkunskaper många år efter det att de lämnat skolan. Ett prov huvudsakligen sammansatt av uppgifter ur standardproven från årskurserna 3 och 6 skulle prövas ut. Resultaten blev emellertid så dåliga att undersökningen fick läggas ner. Det skulle ha varit förödmjukande för människor att märka att de ej klarade dessa uppgifter. Det ville man bespara dem.

Ingrid Holmberg (1975) genomförde 1972 - 1973 en jämförelse mellan utfallet av matematikundervisningen i årskurserna 3, 6 och 9 för elever som läst enligt Lgr 62 och Lgr 69. Resultatet framgår av tabellen. Ett plus betecknar en statistiskt signifikant förbättring och ett minus en försämring. En nolla anger att ingen signifikant skillnad erhölls.

Tabell 14. En jämförelse mellan utfallet av Lgr 62 och Lgr 69.

	Åk 3	Åk 6	Åk 9	
			Allmän kurs	Särskild kurs
Taluppfattning	0	+	0	0
Matematikkunskaper	+	-	-	0
Attityd mot matematik	0	-	0	0

De mätbara effekterna är enligt denna undersökning små. Delresultatet från undersökningen förstärker intrycket att det är på högstadiet som svårigheter förmärks och främst då bland lågpresterande elever. Ingrid Holmberg spekulerar kring om de försämrade resultaten kan bero på inkörningssvårigheter. Hon understryker emellertid det nödvändiga i att matematikundervisning ger god färdighet och att åtgärder vidtas för att förbättra färdigheten. I en SÖ-undersökning från 1974 (1975 b) lyckades eleverna som läste enligt Lgr 69 bättre än eleverna som läste enligt Lgr 62 i årskurs 3 och årskurs 6 men däremot något sämre i årskurs 9.

Vad gäller inställningen till matematikundervisningen visar en SÖ-undersökning (SÖ 1973) från 1972 att eleverna och lärarna uppfattade den som roligare enligt Lgr 69 än Lgr 62. Detta var särskilt markant på låg- och mellanstadiet.

Matematikundervisningens resultat under de första sex skolåren inger inte så stora bekymmer. Stoffet är delvis relativt lätt att tillägna sig och motivationen ofta hög, särskilt i årskurserna 1 - 3. Det är ju självklart viktiga saker man ska lära sig. Alla inser att det är nödvändigt att t ex kunna räkna med pengar - tid - procent, som ju utgör de viktigaste tillämpningarna av den elementära matematikundervisningen.

De verkliga problemen börjar vid matematikundervisning för 13 - 16-åringar. Dessa problem började bli akuta när realskolan byggdes ut under 1950-talet. Andelen underkända elever i matematik var mycket stor. Realexamensskrivningarna fick göras allt lättare och nya kurstyper införas innan realskolan försvann och ersattes med en skolform som bättre passade till kraven.

I internationellt perspektiv gav den svenska matematikundervisningen dåligt resultat. I den stora IEA-undersökningen (Husén, 1967) kom de svenska 13-åringarna på sista plats.

I anknytning till den differentieringsdebatt som fördes i Sverige på 1950-talet genomförde Nils-Eric Svensson (1962) en jämförelse mellan undervisning i odifferentierade och i differentierade klasser. Han konstaterade att det inte var någon större skillnad i prestationshänseende. Dahllöf (1967) visade senare att denna likhet i prestationer huvudsakligen gällde ämnets enklare delar och till priset av att väsentligt mer tid användes på dessa moment i den odifferentierade skolan.

Svårigheterna att tolka de provresultat Svensson insamlade illustrerar på ett slående sätt problematiken kring att jämföra resultat av matematikundervisning med delvis olika målsättning. Svårigheterna blir än större när det gäller att jämföra olika tidsepoker. Det går inte att dra slutsatser från lösningsfrekvenser på provuppgifter utan ingående kännedom om den undervisningsprocess som föregått provet. Kanske har eleverna specialtränat just på de provtyper som provet består av. Jag avstår därför att presentera några data från konkreta prov.

Här ska endast konstateras att ett stort missnöje råder med den räknefärdighet som eleverna har när de lämnar den obligatoriska skolan. Gymnasielärare i matematik förklarar att t ex de svaga resultaten från gymnasiets matematikundervisning har sin huvudorsak i elevernas dåliga förkunskaper.

I IMU-projektet gjorde man en detaljerad målanalys på vilket man baserade framtagning av uppgifterna i terminalprovet (Larsson, 1973). Det visade sig att målen inte alls gick att nå. Detta har delvis sin förklaring i att dessa mål sattes för högt - särskilt vad gäller elevernas verbala förmåga. Att märka är att eleverna som använt IMU-metoden lyckades ungefär lika bra som elever som undervisats med traditionella metoder.

Ytterligare en illustration av att resultaten av matematikundervisningen är andra nu än på 50-talet får man genom att jämföra realexamensskrivningen med standardproven i årskurs 9. Det är en enorm skillnad. Den lättaste uppgiften i realexamen var i allmänhet mer räknemässigt krävande än den svåraste i standardproven. Realexamensproven ställde också högre krav på problemlösningsförmåga, särskilt inom geometrin.

Om orsakerna till resultatförändringarna

På lågstadiet har inte matematikkunskaperna förändrats så mycket genom åren. Detta är ganska naturligt. Matematiken är relativt lätt att tillägna sig, eleverna är starkt motiverade och lärarna har fått arbeta relativt ostörda av skolans politiska omdaning. Den ökade splittringen vad gäller elevernas koncentration har kompenserats av den ökade användningen av laborativt material och mer nyanserade läroböcker.

Även på mellanstadiet är ändringarna relativt små. Räknefärdigheten har uppenbarligen försämrats något bl a med hänsyn till andra krav i samhället med avseende på bråkräkningen. En annan bidragande orsak är att eleverna inte har ro att koncentrera sig på att tillägna sig räknefärdigheter. Detta har bl a påtalats av Magne (1975). Det är så mycket annat som distraherar, vilket bl a beror på samhällets diversifiering. Skolan måste uppfylla så många mål. I ämnen som språk och orienteringsämnen har press, radio och TV bidragit till att hjälpa skolan. För matematik har deras inverkan närmast varit negativ. Bl a har de gjort eleverna mer kritiska och tveksamma mot att lägga ner mycket träning på att skaffa sig matematiska färdigheter.

Mellanstadiets matematikundervisning har också fått lida av den minskade läxläsningen. Vidgningen av kursinnehållet i matematik har dock lett till att eleverna efter mellanstadiet är mer matematiskt allmänorienterade.

På högstadiet slutligen kan konstateras en kraftig nedgång i räknefärdigheten bland medel- och högpresterande. Breddningen av skolan och utvidgningen av matematikundervisningen att omfatta alla elever i nio år har lett till att de lågpresterande lärt sig mer matematik. Resultatet står dock inte alls i proportion till de resurser som lagts ner och den möda det kostat många elever. Denna satsning på lågpresterande får anses vara den främsta orsaken till att övriga grupper fått försämrad räknefärdighet och förmodligen också försämrad problemlösningsförmåga. Bl a har tiden för matematikinlärande (i synnerhet hemarbetet) minskat för dessa grupper (se sid 111). Såsom på mellanstadiet har samhällets diversifiering bidragit. De vinster skolan gjort socialt och mänskligt har skett till priset av bl a färdigheterna i matematik. I och för sig är väl detta ett pris man är beredd att betala. Det viktiga är att vara medveten om det och vidta modifikationer för resten av utbildningen för att kompensera detta. Så har emellertid inte skett och svåra störningar har uppstått i systemet. Lärare och elever har kraftigt störts av skolreformer och nya kursplaner i matematik. Särskilt grundskolereformen respektive Lgr 69 har inneburit påfrestningar.

Elevernas allmänmatematiska orientering har breddats sedan 1950-talet, vilket är en klar vinst. Värdet av en sådan breddning är svårt att uppskatta i synnerhet som grund för fortsatt utbildning.

Gymnasieskolan

Reformer

En gymnasiereform ägde rum under 1950-talet. Därvid infördes den allmänna linjen och reallinjen uppdelades i de båda högsta årskurserna i en matematisk och en biologisk gren. Tidigare - sedan 30-talet - hade det på det allmänna gymnasiet endast funnits real- och latinlinje. På reallinjen kunde man då som tillval läsa specialkurs i matematik. Reformen på 50-talet är av mindre betydelse då det gäller matematikens inriktning och ställning.

Betydligt mer omstörtande för matematikens del var reformen på 1960-talet med införandet 1965 av en ny läroplan för gymnasiet (Lgy 65) då det "gamla" gymnasiet avlöstes av det "nya" gymnasiet.

I början på 1970-talet infördes gymnasieskolan. Det var en enbart organisatorisk reform och den påverkade inte det treåriga gymnasiets interna struktur.

Jag kommer i detta avsnitt att huvudsakligen behandla det allmänna gymnasiets reallinje i det gamla gymnasiet och den naturvetenskapliga (N-) linjen i det nya gymnasiet. I periferin berörs också det tekniska gymnasiet och tekniska (T-) linjen i det nya gymnasiet.

Det är ändringarna i matematik vid införandet av Lgy 65 som är principiellt intressanta när det gäller att studera spelet kring matematikundervisningen.

Mål

Någon större principiell ändring av matematikundervisningens mål har inte skett under de senaste decennierna. Målet har hela tiden varit att ge ett självständigt kunskapsmått och en grund för fortsatt utbildning.

Den största förskjutningen av målet ägde rum genom 1960 års gymnasieutredning (GU). Den lät bl a företa en omfattande avnämarundersökning (Dahllöf, 1963) för att kartlägga kraven på gymnasiet samt studera hur kunskapsstandarden dittills varit.

För matematikens del gav undersökningen beskedet att det fanns stora krav i yrkesliv och vid fortsatt utbildning på "matematik på realskolenivå". Därutöver fanns från många avnämare till reallinjen krav på mer avancerad matematik. Det är emellertid fyra andra resultat som är särskilt intressanta.

- Det framfördes från många håll krav på kunskaper i statistik och sannolikhetslära.
- Man var relativt nöjd med de kunskaper i matematik som gymnasisterna hade.

- Starka önskemål om goda färdigheter av mer studieteknisk natur uttalades. Det gällde t ex anteckningsteknik, översiktslösning, muntlig och skriftlig redovisning osv. Dittillsvarande standard bedömdes som svag.

- Naturvetarna var mer angelägna om språkligt-humanistiskt bildade gymnasister än humanisterna var om naturvetenskapligt bildade.

GU tog hänsyn till dessa fyra resultat i sitt förslag. Man förstärkte kraftigt undervisningen i statistik och sannolikhetslära, gav mindre resurser åt matematikundervisningen, talade varmt för förbättrad studieteknik och förstärkte naturvetarnas humanistiskt-språkliga utbildning.

Målet för matematikundervisningen för naturvetarna förändras också i så motto att undervisningen gjordes gemensam med teknikernas. Behandlingen av geometri och kägelsnitt reducerades därvid kraftigt. Den starka internationella rörelsen, "den nya matematiken", trodde GU på. Detta ledde till vissa målförskjutningar men påverkade egentligen mest metodiken.

Ramar

Stora ändringar har ägt rum sedan 1950-talet. Jag ska nämna de viktigaste.

- Gymnasiet har breddats.

  Under 1950-talet och första hälften av 1960-talet ökade antalet elever i gymnasiet starkt. Exempelvis var det 6 800 elever i nybörjarklasserna i gymnasiet 1950, 23 000 1962, 35 000 1966 och 28 000 1975. Enligt sid 96 gick av 100 födda 1940 7 på realgymnasiet medan av 100 födda 1955 14 gick på N- eller T-linjen. En sådan kraftig expansion har haft starka återverkningar på klassernas nivå. I avsnitt 2.1.2 har jag räknat ut var eleven vid styrgruppens övre gräns rekryterades i den odifferentierade skolan. Räknar man återigen på 100 elever ordnade efter förmåga i matematik kom denna elev i 1950-talets gymnasium på 10:de plats och i 1970-talets gymnasium på 20:de plats. Medelnivån i klasserna har sänkts och de har blivit väsentligt mer heterogena vad gäller förutsättningen för att lära sig matematik.

- Betygssystemet har ändrats.

  Att man inte längre anger vad som är en godkänd respektive en underkänd prestation och att kvarsittning i praktiken upphört har lett till heterogenare klasser. Se vidare sid 108, där jag diskuterat dessa faktorer utförligare. Lärare jag intervjuat har vidare saknat betyget A som särskild morot.

- Studentexamen har avskaffats.

  Studentexamen fungerade som en piska för en minoritet bland de studerande som riskerade att kuggas i examen. Men för majoriteten var den en morot att arbeta fram emot. Repetitionen inför det skriftliga provet och inför den muntliga examen hade många inlärningsbefrämjande effekter. Den åstadkom en bättre balans mellan övningsräkning och teoristudium än dagens avvägning. De lärare jag intervjuat saknar studentexamen också som en festlig höjdpunkt i skolarbetet. Gymnasieutredningen menade att avskaffandet av studentexamen skulle leda till en tidsvinst på vårterminen i den tredje årskursen. Denna vinst visade sig dock väga lätt mot den förlust i arbetsintensitet som examen medförde. Genom att eleverna firar skolavslutandet förefaller den sista månaden i tredje årskursen inte vara särskilt effektiv från inlärningssynpunkt.

- Tiden för matematikinlärande har minskats.

  Enligt avsnitt 2.1.2 lade de studerande på reallinjens matematiska gren på 1950-talet ned 820 h på matematikinlärande. På 1970-talet är inlärningstiden 580 h. På det tekniska gymnasiet var den 740 h mot 660 h på T-linjen på 1970-talet. Tar man hänsyn till den nivå undervisningen bedrivs på erhålls jämförelsetalen 1 540 (matematisk gren), 1 390 (tekniska gymnasiet), 930 (N-linjen) respektive 990 h (T-linjen). I dessa data ingår då att hemarbetstiden minskat.

  Sammanfattningsvis kan man konstatera en kraftig minskning av utrymmet för matematikinlärande.

- Skrivningstider har starkt förkortats.

  I det gamla gymnasiet hade man ett större antal "heldagsskrivningar" i matematik. Skrivtiden var då 5 - 6 1/2 h. I dag förekommer bara kortare prov med flera uppgifter. Detta har lett till en förändring av den typ av uppgifter man arbetar med också i det dagliga skolarbetet. Se vidare sid 130.

- Sämre förkunskaper.

  Särskild kurs på högstadiet ger inte samma grund för gymnasiestudier i matematik som realskolan gav. Detta är den vanligaste förklaringen man får när man frågar gymnasielärare om orsaker till svårigheterna med NT-linjens matematikundervisning. Uppenbarligen bekymrar detta lärarna samtidigt som det får uppfattas som ett sätt att "skylla ifrån sig".

- Stort antal studieavbrott.

  Det är i dag förhållandevis lätt att komma in på N- (och T-) linjerna samtidigt som eleverna anser linjerna svåra. Detta har lett till ett stort antal studieavbrott, dvs eleverna byter linje, vilket har stört studiearbetet på linjen.

o Andra antagningsregler till högre utbildning.

Vilka ämnen som eleverna tycker är viktigast och som de därmed lägger ned stort arbete på påverkas i hög grad av de antagningsregler som gäller för högre utbildning. För reallinjen - N-linjen - är det särskilt antagningsreglerna till läkar-, veterinär-, tandläkar- och civilingenjörsutbildning som är betydelsefulla. Tidigare premierades särskilt resultaten i matematik och naturvetenskap inte minst vid antagningen till de tekniska högskolorna. Numera räknas alla ämnen lika oberoende av timtal. Detta har lett till en sorts antipremiering av ett stort ämne som matematik. Är en elev mån om goda betyg är det strategiskt bättre att göra en stor arbetsinsats i ett litet ämne som läses bara i tredje årskursen än att försöka konkurrera i matematik. Detta har lett till en förskjutning av arbetet mot småämnena. Intuitivt är det kanske också så att eleverna har uppfattat antagningsreglerna så att utbildningsväsendet vill betona att alla ämnen är lika viktiga och rättat sig därefter.

Process

Kursinnehållet

På sid 99 - 103 i "Sju enkäter" redogörs för de förskjutningar mellan momenten som skett på N-linjen jämfört med reallinjens matematiska gren. Förutom de moment som tillkommit eller utgått kan man konstatera att geometrins och problemlösningens ställning försvagats samt att relativt större vikt läggs vid begreppsförståelse och metodkännedom. Som tidigare ägnas endast ca 10 % av tiden åt tillämpningar.

Det är då att observera att denna jämförelse avser situationen på mitten av 1970-talet på N-linjen. När det nya gymnasiet infördes var situationen en annan. Mer tid lades då ner på begreppsförståelse. Den första generationen läroböcker som användes var väsentligt mer formella och abstrakta än den andra generationen läroböcker som används i dag. Kursplanen i Lgy 65 innehöll ett stort antal moment och i början försökte lärarna täcka dem alla relativt fullständigt. Det visade sig inte gå, och i början på 1970-talet kom SÖ med detaljerade dispositionsförslag om vilka moment som borde prioriteras och hur mycket tid som borde ägnas olika moment. Samtidigt modifierades de centrala proven. Detta ledde successivt till en förskjutning av arbetet ute i klassrummen mot en tidsdisposition som framgår av "Sju enkäter".

Arbetsformer

Arbetsformerna har förändrats i liknande riktning som på grundskolans högstadium. Från att tidigare ha varit ett undantag förekommer nu tyst räkning under uppskattningsvis 30 - 50 % av lektionstiden. Man har med andra ord flyttat över en del av hemarbetet till lektionstid. Uppgiftslösandet har därför kommit att dominera arbetet allt mer. Lärarnas genomgångar har gjorts kortare. Bevis för satser överhoppas ofta och ges endast undantagsvis i läxa. Läxorna ges vanligtvis som veckobeting. Teoriförhör är mestadels avskaffade.

En annan betydelsefull förändring är att man i genomsnitt arbetar med kortare och enklare uppgifter. Flerstegsuppgifter är ovanligare liksom uppgifter som ställer större krav på problemlösningsförmåga. Det finns flera orsaker till denna utveckling.

- De kortare skrivningstiderna

  Framför allt i tredje årskursen arbetade man med mer komplicerade uppgifter.

- Den tysta räkningens dominans.

  Enskilt arbete fungerar inte och uppgifterna är halvsvåra eller svåra.

- De heterogena klasserna

  Det är svårt för läraren att få med alla eleverna om man arbetar med mer sammansatta problem.

- Den nya matematiken

  Den ledde till en förskjutning av arbetet mot ett bredare stoffinnehåll på bekostnad av djupet.

Lärare som jag intervjuat menar att detta är en olycklig utveckling. Genom arbete med mer sammansatta uppgifter, där man t ex utnyttjar begrepp och metoder från olika områden av kursen, får många elever en bättre överblick och bättre kunskapsbehållning.

På senare år har introduktionen av räknedosorna inneburit förändringar av arbetssättet. Det är ännu för tidigt att yttra sig om konsekvenserna men förmodligen sker en förstärkning av begreppstillägnelse och av algebraisk räkning.

Resultat

Stort missnöje har från alla håll riktats mot resultaten från matematikundervisningen på det nya gymnasiets NT-linje. Gymnasielärarna själva och olika avnämargrupper har klagat. Det gäller inte minst de tekniska högskolorna och de naturvetenskapliga fakulteterna.

Under 1970-talet har hållits en serie diagnostiska prov i matematik (UKÄ, 1972) för de nyantagna vid de tekniska högskolorna. De visar på dålig räknefärdighet inom väsentliga delar av kursen. Vid tekniska högskolan i Luleå har 1974 - 1977 använts samma prov. De visar på i stort sett samma resultat genom åren. Det är svårt att göra några jämförelser med resultaten från det gamla gymnasiet, eftersom provtypen är helt förändrad.

Tillsammans med Sixten Thörnqvist gjorde jag dock ett försök till jämförelse (Håstad, Thörnqvist,1973). Vi valde ut 16 studentuppgifter i matematik från 1960-talet som fortfarande hade hög relevans i dagens kurser och lät 267 KTH-teknologer pröva sina krafter på dem sedan de genomgått introduktionskursen i matematik. De som

hade matematikbetyget 4 och 5 uppnådde därvid jämförbara resultat med hela populationen när uppgifterna en gång gavs i examen. Då hade ju eleverna specialdrillats på just sådana uppgifter. På enklare studentuppgifter var den relativa lösningsfrekvensen då över 90 %. Alla elever hade alltså så god räknefärdighet att de klarade sådana uppgifter. Så är inte längre fallet enligt undersökningen. Endast de med toppbetyg har i dag denna färdighet. Detta har kraftigt ändrat förutsättningarna för högre studier som kräver matematik.

Det finns dock de som bedömer läget mer optimistiskt. I gymnasieinspektör Sven Hildings rapport (1977) heter det:

> "Om NT-linjen kan sägas att den tycks fungera ganska bra. Den upplevs såvitt jag kan bedöma som meningsfull och omväxlande både av elever och lärare. Jag tycker dessutom att det är berättigat att säga att kvaliteten på studieresultaten stigit under senare år, när man ser på utfallet av de centrala proven."

Om man bortser från resultaten i räknefärdighet och andra baskunskaper kan man fråga om dagens elever i stället besitter andra kvaliteter. Det förefaller svårt att hitta sådana. De har fått en del kunskaper i sannolikhetslära men endast obetydliga i statistik utöver grundskolan. De kan också en del om komplexa tal och differentialekvationer. Gymnasisternas förmåga att genomföra logiska resonemang bedöms som sämre nu liksom att formellt redovisa uppgifter. Vidare säger universitetslärare att eleverna inte lärt sig anstränga sig i gymnasiet. En konkret belysning av detta får man i "Studieavbrottsundersökningen" (Håstad, Högberg, Johansson, 1977). Drygt 40 % av de antagna till högre teknisk utbildning anser sig "ha ansträngt sig ganska litet eller mycket litet" i matematik i gymnasiet.

Högskolan

Jag inskränker mig till de tekniska högskolorna och beskriver utvecklingen endast mycket kortfattat. Utvecklingen är delvis olika på de olika högskolorna. M-KTH behandlas vidare i avsnitt 2.3.

Mål

Målen har endast undergått en mindre förskjutning. Syftet i stort har hela tiden varit att ge teknologerna de matematikkunskaper de behöver under resten av utbildningen. Kursinnehållet blev under 1960-talet mer abstrakt - matematiskt. Denna utveckling bröts i början av 1970-talet och har ersatts av en viss avformalisering och förenklingar. Uttryckt i termer av de fem delmålen från avsnitt 1.1.1 kan begreppsförståelse anses ha fått ökad tyngd. Det dominerande målet är dock liksom tidigare räknefärdighet och i viss mån metodkännedom. Liksom i skolan har vikten vid problemlösning minskat något. En ämnesföreträdare uttrycker det: "Det är mindre knepigheter i problemen nu". Tillämpning har liten betydelse nu liksom förr.

Problemen vid tentamensskrivningar har enligt många bedömare blivit något lättare. Däremot förekommer fortfarande några avslutande mer teoretiska problem av samma svårighetsgrad som tidigare.

Ramar

Förutsättningarna för matematikundervisningen har starkt förändrats genom den breddade intagningen, det minskade intresset för högre tekniska studier och de försämrade förkunskaperna i matematik från gymnasiet.

Processen

Tiden för matematikinlärande har under senare år ökat något på linjer som fått motta många teknologer med dåliga förkunskaper. Övergång har i viss utsträckning skett till lektionsundervisning, vilket ändrat arbetsformerna.

Stormläsningen veckorna före en tentamen har minskat till förmån för ett mer kontinuerligt arbete. Bl a har införandet av s k kontrollskrivningar bidragit härtill.

Resultat

Resultaten inger bekymmer. Andelen examinerade har sjunkit och studietiderna förlängts. Också matematikämnet har visat dåliga tentamensresultat, dock ej principiellt sämre än andra ämnen.

Spik- och skruvinlärande, primärkunskap och initiativkunskap

I avsnitt 1.1 förde jag in begreppen

spik- och skruvinlärande

primär- och sekundärkunskaper

bruks- och initiativkunskaper.

Jag ska nu diskutera svensk matematikundervisning i relation till dessa begrepp.

Vad gäller spik- och skruvinlärandet kan man konstatera att Lgy 65 och Lgr 69 innebar en ökad vikt på spikinlärandet. Man hoppades ju att man i högre grad skulle bygga på förståelse och på en starkare strukturering av lärostoffet. Erfarenheterna visade dock att man gått för långt särskilt i grundskolan. Det skruvbetonade inlärandet borde dominera kraftigt i denna skolform. Många elever behöver arbeta mycket länge med varje moment. Majoriteten moment är mycket konkreta och eleverna kan lära sig dem genom att vänja sig vid dem samtidigt som de försöker förstå dem. Delvis torde drillbetonade metoder vara effektiva. Ta t ex additions- och multiplikationstabellerna och algoritmräknandet. Överinlärande behövs i många fall och det är en typisk ingrediens i skruvinlärandet.

Den ökade tonvikten på de lågpresterande gör också skruvinlärandet än mer aktuellt. I baskursen för lågpresterande ingår mycket lite matematik som kräver spikinlärande. För dessa elever är det tillräckligt att lära sig handskas med den matematik - dvs de data - som finns runt omkring dem.

Under realskoletiden och i början av grundskoletiden försökte man att på högstadiet undervisa en deduktiv geometri enligt en typisk spikmetod med logiska resonemang. Detta fick man överge på grund av de logiska svårigheter det innebar. Man har i stället övergått till en mätinriktad geometri där mätning och räkning med vinklar, sträckor, omkretsar, areor och volymer dominerar. Därvid dominerar skruvmetoden.

Samma utveckling finns på gymnasiestadiet, där den nya matematiken innebar mer spikinlärande, som dock senare successivt reducerats.

Enligt diskussionen på sid 69 skulle primärkunskaper vara en förutsättning för att en person skulle kunna tillämpa matematik. Jag hävdade också att majoriteten elever inte tillägnade sig primärkunskaper inom en kurs förrän de läst kursen efter. Detta fenomen var inte så påtagligt i den "gamla" skolan, där man med hjälp av läxor, förhör, underbetyg och examina i högre grad såg till att kunskaperna hade visst djup. Enligt denna teori har man förmodligen alltid underskattat behovet av matematikkunnande för att kunna använda matematik. Detta har lett till obalans i olika typer av utbildningar. Eleverna har blivit frustrerade av att de ej kunnat tillämpa sina matematikkunskaper i andra ämnen. Matematiklärarna har fått motta kritik av denna anledning. Lärare i ämnen som tillämpar matematik har blivit besvikna på elevernas matematikkunskaper och tillgripit matematikfria metoder. Avnämare har aldrig upphört att beklaga sig över det dåliga matematikkunnandet. Skolreformatorer har underskattat behovet av tid för matematikinlärande och gjort "skrivbordskonstruktioner" som inneburit allvarliga störningar i skolsystemet.

Inför 60-talets reformer av matematikundervisningen var man missnöjd med elevernas förmåga att tillämpa sina matematikkunskaper. De sades bl a vara för beroende av de beteckningar som matematiken infört: "Hette variablerna något annat än x och y var eleverna helt ställda". Ett syfte med reformerna var att förbättra denna situation. Tyvärr fick de snart motsatt effekt. Genom de tidsreduktioner som förekom och den minskade differentieringen blev matematikutbildningens potential lägre och därmed primärkunskaperna försämrade.

Vad slutligen gäller brukskunskaper - initiativkunskaper har de ansvariga i allmänhet varit för optimistiska att folk skulle kunna tillägna sig initiativkunskaper. Dessa ställer i allmänhet stora krav på matematisk förmåga och kräver att man arbetar med matematik länge. Det hade förmodligen varit mer realistiskt att ha goda brukskunskaper som normalmål för matematikundervisningen och ge dem som har ett särskilt intresse för ämnet möjligheter att skaffa sig initiativkunskaper.

Applicerat på grundskolans matematikundervisning leder resonemanget till eftertanke om värdet av vissa satsningar av undervisningstid på vissa elevgrupper. Det gäller förmodligen inte de mest utpräglat lågpresterande. Den kunskap de behöver tillägna sig är i det närmaste helt av brukskunskapskaraktär. Tvivlet gäller snarare vissa mellangrupper, vilka man hoppas skulle kunna förvärva sig en hel del

initiativkunskaper, t ex vad gäller förmåga att tillämpa matematik eller att kunna ta matematiska initiativ. Kanske borde man inskränka sig till att se till att de, vad gäller högstadiekursen, har brukskunskaper färdiga att användas då de behövs i vardagsliv, fortsatt utbildning eller yrkesarbete och inskränka initiativkunnandet till de mer elementära delarna, dvs låg- och mellanstadiekursen.

2.2 Makthavarna inom svensk matematikundervisning

Inledning

Skulle man bara behöva ange den maktfaktor som spelat huvudrollen i styrningen av matematikundervisningen är svaret enkelt: traditionen. Men det finns en rad andra "makthavare" som har viktiga birolller. Deras inverkan är viktig att studera. Och hur betydelsefull är traditionen? För att få ett grepp om dess roll gör jag följande förenkling. Den matematikundervisning som ägde rum fram till 1950-talet betraktas som tradition. Rimligheten i ett sådant antagande bestyrks kraftigt av att matematikundervisningen då varit relativt statisk under lång tid och endast smärre modifieringar hade skett under de närmast föregående decennierna.

I föregående avsnitt har jag beskrivit och analyserat utvecklingen av svensk matematikundervisning sedan 1950-talet. Jag har därvid särskilt de fyra delaspekterna

mål - ramar - process - resultat.

Jag ska i detta avsnitt analysera vilka olika intressentgrupper som varit involverade i spelet kring matematikundervisningen. Bla ska jag studera vilken inställning de haft och i vilken utsträckning varje grupp kan bedömas ha påverkat utvecklingen.

I anslutning till SIA-utredningen för Abrahamsson (1974) en diskussion om beslutsprocessen i utbildningen. Han säger bl a:

> "Från intressenterna ställs vissa krav på utbildningssystemet med avseende på dess mål (kunskaps-, färdighets- och värderingsförmedling; differentiering av utbildningen i primär-, sekundär- och högre utbildning etc). I den mån kraven är motstridiga engagerar parterna sina respektive maktresurser (ekonomiska, organisatoriska, administrativa) för att förverkliga de egna syftena. Maktresursernas fördelning har direkta konsekvenser för den slutgiltiga utformningen av utbildningssystemets målstruktur. Såväl formella (remissbehandling, utredningsverksamhet med partsrepresentation mm) som informella överläggningsprocedurer förekommer. Deras slutprodukt är de i läroplaner formulerade målen för grundskola, gymnasium och högre utbildning."

Jag avser inte att mer detaljerat diskutera hur makthavarna i praktiken utövar sitt inflytande utan behandla frågorna mer allmänt. För en diskussion av begreppet intressentgrupp se Patriksson (1971).

Jag särskiljer i fortsättningen tre huvudgrupper av intressenter.

A. Utbildningspolitikerna

Jag tänker därvid på såväl policyskapare som beslutsfattare på olika nivåer.

B. Lärarna i matematik i skolformen i fråga

Matematiklärare är dessutom också avnämare av matematikundervisning i mottagande skolor. I denna bemärkelse ingår de i grupp C. I grupp B ingår de som arbetar med undervisningen i klassrummet på stadiet i fråga.

C. Avnämarna

Dessa utgör en bred grupp och den består bl a av lärare i mottagande skolor, av företrädare för yrkeslivet men också av allmänheten - samhället - i bred bemärkelse.

Först diskuterar jag de tre intressentgruppernas roll avseende matematikundervisningen i grundskola, gymnasieskola och på teknisk högskola. Avsnittet avslutas med en analys av vilken roll begränsade grupper - expertgrupper, forskare, SÖ-personal, lärarföreträdare, press, osv - spelat.

Grundskolan

Vilken roll har politiker, lärare och avnämare spelat för matematikundervisningen för ungdomar upp till 15-årsåldern?

Politikerna

Utbildningspolitikernas inverkan på skolmatematiken har huvudsakligen varit indirekt men den har inte desto mindre varit utomordentligt stark. Den har varit indirekt genom att politikerna huvudsakligen ägnat sig åt övergripande frågor som skolans allmänna målsättning och organisation. Men av enstaka ämnen är matematik jämte svenska och främmande språk de som tilldragit sig den största politiska uppmärksamheten.

Skolans breddning och omgestaltning till att bli en hela svenska folkets skola har varit en central fråga för utbildningspolitiker. Man har varit överens om att denna breddning i görligaste mån bort ske med bibehållande av kunskapskvalitén, åtminstone i viss bemärkelse. Kunskapssidan har dock fått komma i andra hand och de sociala vinsterna har varit utslagsgivande. Man nöjde sig vid reformerna med relativt svaga "indicier" på att kunskapsmålen kunde hållas uppe. Ett exempel på det är N-E Svenssons undersökningar på 1950-talet om differentieringsformens ringa inverkan på kunskapsnivån. Se vidare sid 124.

Av sociala skäl var det nödvändigt att ändra betygssystem och flyttningsregler, att slopa examina och att flytta stadiegränser. De gamla reglerna hade ödesdigra sociala effekter, bl a i sitt starka betonande av kunskapssidan. Man var inte ovillig att genomföra sådana ändringar, eftersom de försvårade jämförelser mellan gamla och nya skolan om de inte helt omöjliggjordes.

I utbildningspolitikernas ögon kom den nya matematiken på 60-talet mycket lägligt. Det hade då börjat visa sig svårigheter att upprätthålla kunskapskvalitén på högstadiet jämfört med realskolans standard. Detta orsakades bl a av att högstadiets konstruktion medförde att en stor majoritet av eleverna - och deras föräldrar - ville hålla alla möjligheter öppna. Det gjorde man bäst genom att välja en teoretisk studieinriktning och exempelvis läsa särskild kurs i matematik. Denna fick därigenom en stor bredd (heterogenitet) och det visade sig svårt att hitta arbetsformer som möjliggjorde en effektiv differentiering inom klassens ram som ju hade varit det praktiskt mest önskvärda. Utbildningspolitikerna accepterade den nya matematiken. Se vidare sid 150.

På mitten av 1970-talet knöts så politikernas intresse till SIA-skolan och med den en ny frälsningslära för matematikens del. Den hette basfärdigheter. Tanken var den att Lgr 69 för matematikens del hade medfört en för stor splittring med alltför många moment på varje stadium. Om man nu reducerade antalet moment och i stället lade vikt vid de centrala delarna av de övriga momenten och genomförde ett omfattande träningsprogram så skulle förhållandena förbättras avsevärt. Många förespråkade också att lågpresterande elever skulle ges mer tid för att träna basfärdigheter i matematik medan övriga elever gjorde något helt annat. Betonandet av basfärdigheter är också det en internationell rörelse, som samtidigt tagit fart i t ex Europa och Nordamerika.

I detta läge befinner vi oss när detta skrivs och det är ännu för tidigt att sia om hur kraftigt pendelutslaget blir och hur mycket den faktiska uppläggningen av matematikundervisningen kommer att ändras. Under alla omständigheter förefaller det klart vilken inställning skolpolitikerna har. De vill framför allt demokratisera skolan och ge de elever som i dag vantrivs i skolan nya chanser och därmed få ut mer av den. Syftet är vällovligt men kommer man att lyckas? Har man förstått skolans kultur tillräckligt? Möjligtvis kan räknedosorna påverka situationen så att basfärdighetsresonemanget får andra konsekvenser än det annars skulle ha fått.

Differentieringen på högstadiet har hela tiden varit en intressant skolpolitisk fråga. Den s k Visbyuppgörelsen 1960 ledde till de sammanhållna årskurserna 7 och 8. I Lgr 69 utvidgades den att också gälla åk 9. I matematik behölls i Lgr 62 en alternativ kursuppdelning i matematik liknande den som funnits i enhetsskolan. På basis av försöksverksamheten med IMU föreslog SÖ i läroplansöversynen 1967 att uppdelningen skulle upphöra. Samtidigt menade SÖ att man skulle spara lärare genom IMU-metoden. På denna punkt sa emellertid regeringen nej. Den menade att erfarenheterna var för begränsade. Detta får anses som ett mycket intressant utslag.

I samband med SIA-skolan har differentieringsdebatten gått vidare och uppdelningen av matematiken på högstadiet är en högaktuell fråga. Önskvärt vore att denna fråga avpolitiserades och att man lät pragmatiska synpunkter dominera. Detta torde dock vara ett fåfängt hopp. Matematiken kommer alltid att vara av principiellt intresse för skolpolitikerna. Matematik är ett mycket skolinriktat och formellt ämne. Att lära sig det kräver stor uthållighet, målmedvetande samt teoretisk läggning och begåvning. Det har alltid haft en utslagsgivande roll som grund för fortsatt utbildning. Denna roll önskar många reducera. SÖ:s pedagogiska nämnd efterlyste 1976 en fortsatt och vidgad debatt om matematikämnets ställning i åtminstone tre avseenden:

- behovet av matematik i samhälle och näringsliv
- överspridningen av matematikkunskaper till andra områden
- matematiken som socialt differentierande instrument.

Nämnden skriver - enligt uppgift genom Sixten Marklund - på följande sätt om den tredje punkten:

> "Det tredje och kanske viktigaste skälet till att man bör debattera matematikämnet är dess roll och ställning som socialt differentierande instrument. Det torde inte råda något tvivel om att matematik i dag är ett av de starkast differentierande ämnena i skolan. Det är därmed också sannolikt ett av de ämnen som bidrar till den sociala skiktningen i dagens samhälle. Den enskilde elevens upplevelser av framgång och misslyckande i skolan, av personligt egenvärde och personlig tillfredsställelse avgörs i icke ringa grad av vad som händer i ämnet matematik. I få ämnen och få prestationssammanhang ses rangordningen av individerna och uppdelningen av resultaten i bättre och sämre, högre och lägre, som mera självklara än i matematik. Den enskilde individen påverkas starkt av hans eller hennes upplevelser av matematikundervisning och matematikstudier i dagens skola.
>
> Pedagogiska nämnden finner det inte utan vidare självklart att matematikämnet i framtiden skall vara så starkt differentierande som nu. ..... Nämnden har ..... velat stimulera till en vidgad och förutsättningslös debatt om matematikämnets roll i en skola där gårdagens traditioner inte utan vidare kan vara ensamt vägledande utan där dagens krav på den enskildes allsidiga utveckling som individ och samhällsmedborgare bör utgöra de primära målen." (SÖ, 1975)

Politikerna har ännu ej sagt sitt sista ord.

Lärarna

Lärarna har hela tiden arbetat för att få en fungerande undervisning som passar både elever och lärare. De har velat ha realistiska mål för arbetet. När skolpolitikerna har kommit med propåer om en förnyelse av skolan har lärarna i allmänhet som grupp spjärnat emot. De har hänvisat till de praktiska erfarenheterna och ifrågasatt alltför vilda planer.

Dahllöf (1971) konstaterar att ett särdrag i svensk reformstrategi är just "att initiativet till reformerna har främst kommit utifrån skolan och har i allmänhet tagits av politiker. Konsekvensen av detta är att vi i vårt land har ett ganska renodlat exempel på en reformstrategi som initierats utifrån systemet. Det är därför ganska naturligt om lärare och andra befattningshavare i skolan upplever att förändringen mer eller mindre blivit påtvingad dem uppifrån".

Lärarna har emellertid varit för skolans demokratisering och hävdat de mänskliga rättigheterna före de politiska ideologierna. De har varit bärare av en sekellång undervisningstradition som förmedlats mellan generationerna genom det praktiska skolarbetet. Relativt litet av denna tradition har tecknats ned och det har gjort det svårt att ibland artikulera de rätta synpunkterna mot en alltför stark reformiver. Det har lett till en viss känsla av maktlöshet inom lärarkåren. Lärarna har varit nedkörda av det dagliga arbetet i skolsalarna med en vital och ofta oppositionell ungdom. De har varit väl fast i det bestående utan att hitta de rätta vägarna till förnyelse. En bidragande orsak är att många lärare tillbringat hela sitt liv i skolan - först som elever sedan som lärare. En viss konservatism leder detta lätt till. Vad gäller ämnet matematik är förnyelsen särskilt svår. Målen har i huvudsak legat stilla länge, t ex avseende räknefärdighet.

På låg- och mellanstadiet lägger lärarnas vanligtvis korta utbildning i matematikteori ett hinder för utveckling. Detta kompenseras av att lärarna på dessa stadier ser mer elevorienterat på matematiken och att de varit beredda att acceptera nyheter om de ger eleverna nya möjligheter.

Sveriges Lärarförbund säger i ett yttrande 1968-02-05:

> "Matematiken har allt mer blivit ett kommunikationsmedel. Mer och mer information lämnas genom siffersammanställningar och statistiska redovisningar. Behovet av ett internationellt gällande matematiskt språk har visat sig allt större. Med vår nuvarande matematikundervisning har vi nått sämre resultat än vad andra länder nått. Såväl innehållet i matematikundervisningen som dess metodik måste av den anledningen ses över."

Lärarna i gemen tog upp idéerna i Lgr 69 om att utnyttja begrepp från mängdläran och att kraftigt utvidga elevernas arbete med laborativt material. Protesterna mot de delar av läroplanen i matematik som uppfattades fungera mindre väl var relativt milda och nyanserade. Förskjutningar i stoffinnehållet med hänsyn till samhällsutvecklingen har av lärarna accepterats beredvilligt. Överhuvudtaget har låg- och mellanstadiets lärare varit positivt avvaktande vad gäller matematiken. Lärarförbundet ivrade t ex starkt för fortbildningsinsatser.

Betydligt livaktigare har högstadiets matematiklärare varit. På detta stadium har också problemen och omgestaltningarna av kurserna varit större.

På 1950-talet gällde frågan inte främst stoffinnehållet utan att hitta lämpliga organisationsformer för att undervisa majoriteten av Sveriges 14 - 16-åringar i matematik i stället för bara den begränsade del som gick till realskolan. De etablerade och erfarna matematiklärarna från realskolor och läroverk förhöll sig mycket avvaktande i detta utvecklingsarbete. I viss utsträckning var man negativ. Det var en stor brist på matematiklärare på 1950-talet och början av 1960-talet och det blev formellt icke-kompetenta lärare som fick åta sig matematikundervisningen i försöksverksamheten med enhetsskolan.

Lärarna delade inte skolpolitikernas optimism att det gick att lära nästan alla realskolematematik. Man får säga att utvecklingen gav lärarna rätt.

I samband med införandet av det sammanhållna högstadiet i Lgr 62 sade sig Lärarnas Riksförbund (LR) acceptera skolberedningens mål men föreslog en mer långtgående differentiering. Även organisationerna för lärarna på låg- och mellanstadiet godtog förslaget med de två alternativkurserna i matematik. LR önskade även inför Lgr 69 en försiktigare utveckling. Det är att notera att LR i sitt remissvar och sina ställningstaganden i kommittéer och referensgrupper intagit en dämpande och försiktig attityd och endast undantagsvis velat "vrida klockan tillbaka".

Inför Lgr 69 hade SÖ ju föreslagit att allmän och särskild kurs i matematik skulle slås samman. LR (1968) var helt naturligt emot detta. Det skulle bl a ha inneburit en kraftig minskning av lärarbehovet. Liksom regeringen menade LR att erfarenheterna från IMU var för osäkra. Sveriges Lärarförbund (1968) var mer positivt och accepterade sammanslagningen och ett allmänt införande av IMU-metoden, dock med vissa förbehåll. LR var dock i princip välvilligt inställt till IMU-försöket tills det fick för klara drag av rationalisering av resurser. Under uppbyggnaden av IMU i mitten av 1960-talet anmälde sig så många lärare till försöksverksamheten att IMU kunnat omfatta 30 000 - 40 000 elever i årskurs 7. Förmodligen drog det moderniserade stoffinnehållet mer än arbetsmodellen. När det sedan kom nya läromedel efter införandet av Lgr 69 vände lärarna det tungrodda och individualiserande IMU-materialet ryggen.

Högstadielärarna var positiva till moderniseringsvågen på 1960-talet. Det var mycket lätt för Nordiska matematikkommittén och IMU att få lärare att bedriva försöksverksamhet och lärarorganisationerna hade ingen invändning mot matematikens utformning i Lgr 69.

Snart ändrades dock inställningen. När lärarna arbetat efter Lgr 69 bara något år kom en kraftig reaktion. Stoffet var för omfattande och teoretiskt. Räknefärdigheten sjönk för mycket. Läromedlen för allmän och särskild kurs var för lika. Samverkan med andra ämnen var för dålig. Det var för svårt med räknesticka i allmän kurs. Mängdlära var helt överflödigt. Vektorer och trigonometri var inget för grundskolan. Sannolikhetsläran var för omfattande, osv.

Denna reaktion ledde till att läroböckerna modifierades successivt. Fortbildningskonsulenterna hjälpte lärarna att sovra i böckerna genom att ge ut prioriteringslistor. SÖ gav ut handledning om basfärdigheter (SÖ, 1973).

Fortbildningskonsulenterna och SÖ initierade undersökningar som påvisade många brister i den elementära räknefärdigheten.

Ideologiskt styrkta av skolpolitikerna genom SIA-arbetet fokuserades lärarnas önskemål i basfärdigheter, som bl a har blivit ett slagord i den läroplansdebatt som nu pågår. Då och då hörs spridda uttalanden om att också tänka på de högpresterande men det stora intresset gäller de breda elevgrupperna. Man är från lärarhåll angelägen om att eleverna åtminstone ska få med sig något från högstadiets matematikundervisning. I skymundan har hamnat tankar om varje individs rätt att utveckla sin matematiska förmåga och om behovet av orientering om matematikens roll och möjligheter. Lärarna har märkt att Sverige reagerar när folk inte kan skriva och tolka enkla meningar samt stava och räkna rätt. Denna reaktion ställer lärarna sig bakom och underblåser.

Avnämarna

1957 års skolberedning lät göra en stort upplagd undersökning för att kartlägga behovet av matematikkunskaper i den obligatoriska skolan (Dahllöf, 1960). Den visar att behoven vid fortsatt utbildning helt dominerar över yrkes- och fritidskraven. De senare kraven är relativt små. Undersökningen visade att överslagsräkning borde spela en större roll än vad den dittills gjorde. En förstärkning av överslagsräkningen i skolan blev också det mest påtagliga resultatet av undersökningen.

Det har gjorts flera liknande avnämarundersökningar och de lider alla av flera principiella begränsningar. En sådan är att de som svarar har så svårt att frigöra sig från sin egen utbildning och från förhållanden som vid frågetillfället existerar i skolan. Ett exempel på detta är i Dahllöfs undersökning gymnasielärarnas uttalade behov av kunskaper i "ränta och rabatt", något som eleverna rimligtvis skulle klara sig helt utan.

En annan typ av begränsning är att man bara kommer åt en sorts formell "papper-och-penna-matematik" medan däremot en mer allmän matematisk förmåga, som bygger på övergripande begreppsförståelse och som yttrar sig i förmåga till överslagsräkning och beslutsfattande, kommer helt bort. Bl a Magne (1975) har påpekat detta och jag delar helt hans inställning. Det gör uppenbarligen också avnämare i allmänhet och skolpolitiker. Annars skulle skolans - och högskolans - matematikundervisning ha skurits ned mer än som skett.

Den allmänna opinionen i Sverige har alltså accepterat ett matematikinlärande av i huvudsak den typ vi i dag har och alltid har haft. Det betyder att det läggs stark tonvikt på träning av räknefärdigheter men att man tror att eleverna samtidigt lär sig mycket annat som kommer till nytta på olika sätt i livet. Marklund (SÖ, 1975 b) har satt detta i fråga. Avnämare i allmänhet uppfattar emellertid matematiken som ett viktigt kommunikationsämne och anser att matematik i dag spelar en viktig roll i samhället.

De flesta matematikavnämare har emellertid hållit sig relativt passiva med undantag av en grupp: gymnasielärarna i matematik. Dessa har många gånger slagit larm under de senaste decennierna. Och budskapet är entydigt: de elever som gymnasielärarna får motta har en allt sämre räknefärdighet. Denna kritik har mottagits mycket seriöst av SÖ, högstadiets matematiklärare och övriga inblandade. Den har säkert kraftigt underblåst önskemålen om en koncentration på basfärdigheter.

Gymnasieskolan

Politikerna

Utbildningspolitikerna på 1960-talet intresserade sig inte speciellt för matematiken på gymnasienivå utan begränsade sig främst till övergripande frågor. Man önskade ett mindre specialiserat gymnasium som var mindre beroende av den högre utbildningen än förut. Detta har haft konsekvenser för matematikens del. I det gamla gymnasiet upptog den mest omfattande matematikkursen totalt 20 veckotimmar under de tre åren. I det nya gymnasiet är 15 veckotimmar maximum. Det var många önskemål som behövde uppfyllas och man ansåg sig inte behöva ta så stor hänsyn till dem som krävde mycket matematik. De ändrade intagningsreglerna till högre utbildning har verkat i samma riktning. Varje ämne är värt lika mycket oavsett timtal och oavsett den högre utbildningnes inriktning. Detta har klart missgynnat NT-linjens matematik.

Politikerna sa i princip ja till den nya matematiken. Dels uppfattade man det förmodligen som en naturlig ämnesutveckling dels kunde man motivera timtalsreduktionen med de förhoppningar som knöts till den nya matematiken. Se vidare resonemanget på sid 136 som har relevans även på gymnasiestadiet.

En avgörande roll har politikerna spelat vad gäller att avskaffa den gamla urvals- och examensskolan. Det har haft stora praktiska konsekvenser för matematik som diskuterats ovan. Delvis får politikerna anses ha varit medvetna om - och därmed önskat - dessa konsekvenser. Men i stor utsträckning hoppades nog politikerna på att gymnasisterna skulle nå de önskade kunskaps- och färdighetsmålen parallellt med de nytillkomna målen. Detta får rubriceras som en sorts önsketänkande. Samtidigt måste man beklaga att den pedagogiskt-ämnesmetodiska forskningen inte hunnit längre så att den kunnat förutsäga konsekvenserna i högre grad.

Lärarna

LR förhöll sig försiktigt avvaktande till gymnasieutredningens förslag och avstyrkte reformer som var för drastiska eller oprövade. Man insåg emellertid samhällets utveckling och ägnade sig främst åt att föreslå vissa modifikationer.

Det var lätt för den Nordiska matematikkommittén att få lärare att delta i försöksversamheten. Man kan säga att lärarna var för den nya matematiken. Den hade ju också i motsats till de övergripande reformerna sin rot inuti skolan och hade ett kunskapsorienterat mål. Den föreföll att ge lärarna ett nytt instrument för att sprida matematikkunskaper.

Snart blev det andra tongångar. Riksföreningen för lärarna i matematik, fysik och kemi skrev 1971-06-22 till SÖ (Riksföreningen, 1971):

> "Resultatet av undervisningen i matematik på gymnasiets naturvetenskapliga och tekniska linje har inte blivit vad som förväntades då gymnasiet omorganiserades 1965 och nya tim- och kursplaner infördes.
>
> .....
>
> De uppvisade bristerna gäller inte enbart den elementära räknefärdigheten utan också grundläggande kunskaper om matematiska satser, bevis och metoder samt förmågan till självständigt arbete. Inom sådana skolämnen där matematiken är ett oumbärligt hjälpmedel, är situationen i vissa fall katastrofal. Det gäller särskilt den tekniska linjen, där eleverna inte har möjlighet att tillägna sig den i läroplanen föreskrivna utbildningen utan att först ha förvärvat vissa grundläggande matematiska insikter och färdigheter. Denna utbildning syftar nämligen inte till att ge en orientering om teknik utan att ge eleverna förmåga att kvantitativt och analytiskt behandla tekniska problem. Man kan därefter utan överdrift påstå att minst en tredjedel (med betygen 1 eller 2 i matematik) har så svaga matematikkunskaper, särskilt vad gäller numerisk och algebraisk räknefärdighet, att deras tekniska studier är av mycket begränsat, i vissa fall obefintligt, värde."

Som orsaker angav man sammanslagningen av matematikkurserna för biologer, matematiker och tekniker, den vidgade tillströmningen till gymnasiet, kursens ökade omfång, det minskade timtalet och skrivningarnas utformning. Föreningen önskade bl a en revision av kursplanerna i matematik.

1973-10-12 skrev man till SÖ på nytt (Riksföreningen, 1974). Man välkomnade SÖ:s nya studieplansförslag men bedömde att det "torde endast få marginella effekter på undervisningens resultat, eftersom relationen mellan undervisningstid, kursomfång och elevernas förkunskaper ännu inte är rimlig". Man ansåg att "de egentliga gymnasiestudierna i matematik kan påbörjas först efter cirka en halv termins arbete i gymnasiet". Föreningen yrkade på att en lång rad åtgärder borde vidtas, bl a att grundskolans matematikundervisning skulle utvärderas och att tillträdesreglerna till högre studier skulle ändras.

Utvecklingen vad gäller gymnasiet illustrerar ganska klart lärarnas roll. De är ej initiativtagare till skolans omgestaltning utan följer utvecklingen under viss protest. Sedan slår de larm avseende de delar inom vilka reformerna misslyckas. Vanligtvis har det gällt delar där de anmält avvikande mening när de infördes.

Avnämarna

Avnämarna av gymnasiets matematikutbildning uttalade sina önskemål i Dahllöfs (1963) undersökning och de var även representerade i själva gymnasieutredningen. De flesta avnämarna var positiva till förslaget till nytt kursinnehåll. Departementschefen (Kungl Maj:t, 1964) skriver:

> "Den modernisering av lärostoffet i matematik, som GU föreslår, hälsas genomgående med stor tillfredsställelse. SÖ framhåller bl a att planen präglas av en tydlig strävan att med hjälp av ett sovrat och väl valt stoff låta väsentliga metoder och begrepp träda i förgrunden. Lärarkollegiet vid Tekniska högskolan i Stockholm uttalar att målsättningen i ämnet synes föredömlig från högskolans synpunkt."

Inte heller de stora organisatoriska förändringarna, som innebar starkt ändrade ramar för matematikutbildningen, väckte någon stor debatt utan accepterades i stort av avnämarna även om en viss tveksamhet kunde spåras i många läger.

När Lgy 65 tillämpats några år reagerade olika avnämargrupper kraftigt mot resultaten av gymnasiets matematikundervisning. Särskilt betydelsefull torde den samarbetsgrupp ha varit som SÖ-UKÄ inrättade. Den spelade en viktig roll vid tillkomsten av den modifiering av studieplanerna som SÖ utgav 1972.

Avnämarna har inte ansett denna "kontrareform" tillräcklig utan fortsatt att under 1970-talet i olika former uttala sitt missnöje med gymnasiets matematikundervisning och med de konsekvenser för matematikens del av de nya tillträdesregler som blev resultatet av U 68-reformen. Se bl a MATEK (1973) och RESULTATGRUPPEN (1974). Invändningarna förefaller emellertid inte väga särskilt tungt och de av utbildningspolitikerna uppdragna riktlinjerna fullföljs med endast små modifikationer.

De tekniska högskolorna

Politikerna

Utbildningspolitikerna har kraftigt ökat intagningen till de tekniska högskolorna. Den har under den aktuella tidsperioden trefaldigats. Enligt gjorda uttalanden har man menat att nivån på civilingenjörsutbildningen borde vara oförändrad. Enligt mer preciserade yttranden av insatta politiker har detta tolkats så att högskolorna fortfarande ska utbilda ett stort antal ingenjörer på hög nivå samt dessutom ett antal på "mellannivå". Även för den senare kategorin menade man att det fanns många arbetsmöjligheter.

Målet för utbildningen har politikerna påverkat endast i mindre utsträckning. Studierna har dock förutsatts bli mer samhällstillvända. Exempelvis kom ett påbud i början av 1970-talet om att 8 % av utbildningen skulle avse arbetsvetenskapliga inslag. En utveckling åt detta håll har också skett.

Lärarna

Matematiklärarna har haft en svår ställning när man försökt att ge teknologerna de matematikkunskaper som krävts för de övriga ämnena. De har vidtagit en rad marginella åtgärder för att förbättra resultaten. De har protesterat kraftigt mot den ändrade inriktningen av gymnasieskolan och påtalat brister i teknologernas matematikkunskaper.

Matematiklärarna har hävdat sina åsikter väl men har heller ej utsatts för mer omfattande krav på nyordning. De utgör en stark maktfaktor.

Avnämarna

Den enda avnämargrupp av betydelse som finns utgörs av lärare i andra ämnen vid högskolorna. De har i stort sett varit nöjda med matematikernas sätt att sköta matematikundervisningen sedan de fått sina centrala önskemål tillgodosedda.

Specialistgruppers inverkan

I denna del diskuterar jag i vilken utsträckning olika begränsade grupper konstituerar makthavare.

Fortbildningskonsulenter

Fortbildningskonsulenter rekryteras helt bland lärarna och undervisar under konsulenttiden på halvtid. Särskilt konsulenterna i matematik på högstadiet har kommit att bli en viktig maktfaktor. De utgör ju förbindelselänken mellan myndigheterna och skolsalen och förmedlar det i dag mer än någonsin betonade gräsrotskännandet. Under 1970-talet har de engagerat sig i att utvärdera räknefärdigheten och påtalat behovet av basfärdigheter.

Lärarhögskollärare

Lärarhögskollärarna utgör också en lärargrupp. Deras roll är svårbedömd. De är nedtyngda av metodikundervisning och klassrumsbesök och har därför inte kommit att spela den huvudroll i den metodiska utvecklingen som man hoppats. De har också upplevt stora svårigheter när de försökt inplantera i den nya lärargenerationen det utvecklingsmedvetande som bl a fordras för att föra upp matematikundervisningen ur den defaitism den får anses befinna sig i.

Lärarorganisationernas representanter

Vad gäller ämnesmetodiken har man varit relativt passiv. Inga mer omfattande initiativ har tagits. I allmänhet har lärarorganisationerna reagerat i efterhand. När erfarenheterna från verksamheten i klassrummen starkt pekat åt ett visst håll har man slagit larm. Det gäller bl a sjunkande räknefärdighet. I sådana fall fungerar man som uppsamlare av läraropinionen men knappast alls som agitatorer.

Lärarorganisationerna har engagerat sig starkare i frågor som gäller alla ämnen och skolan i sin helhet. Här förefaller det som om lärarorganisationernas inflytande håller på att bli successivt starkare. De har emellertid inte heller här fungerat som pådrivande utan tagit som sin uppgift att moderera utvecklingen och göra besluten mer realistiska.

SÖ:s fasta personal

SÖ:s fasta personal har i allmänhet en uppföljande roll. Den ser till att anvisningar för skolarbetet utfärdas, att prov och examina kommer till stånd, att standardprov och centrala prov utarbetas och följs upp, att anpassningen med hänsyn till utvecklingen av anvisningar och bestämmelser utförs, att fortbildning genomförs, att utvärderingar utförs, att expertgrupper utses och servas, att målinriktad forskning bedrivs, osv.

Dessa roller är mycket viktiga och de personer som utför dem blir därför betydelsefulla. Det gör dem inte till ideologiskt ledande men de kan påverka det praktiska förverkligandet av ideologierna.

Ser man tillbaka på SÖ-personalens agerande vad gäller skolmatematiken under de senaste decennierna kan man konstatera en viss stelbenthet och brist på nyansering. På 1950-talet höll man alltför principfast kvar vid det bestående. Man försökte flytta in den gamla matematiken med dess specificerade krav i den nya skolan. När sedan de nya tongångarna kom i början på 1950-talet slog man om för hastigt och oövertänkt. Man anammade för kritiklöst nytt kursinnehåll, nya metodiska grepp, nya skrivningstyper, nya kompetensbestämmelser, nya differentieringsformer, nytt betygssystem, osv. Detta ledde till allvarliga störningar av matematikutbildningen som vi i dag tvingas ta konsekvenserna av.

De ansvariga på SÖ för matematiken har rekryterats bland lärarna.

Läroplans- och andra expertgrupper

Även dessa personer är nästan hundraprocentigt lärarrekryterade. Som makthavare är de egentligen ointressanta. De utses såsom bärare av vissa expertkunskaper eller för att de har en viss inställning. De fullgör en begränsad uppgift och försvinner från arenan.

Läromedelsförfattare

Denna grupp består också av lärare. Deras roll som påverkare av matematikundervisning är omstridd.

Det är genom forskning klarlagt att läromedlen styr undervisningen kraftigt. Det gäller framför allt stoffinnehåll och allmän inriktning. Den enstaka läraren studerar sällan läroplansdokument utan följer läroboken. Ur denna aspekt spelar läromedlen en viktig roll.

Läromedlen har förändrats mycket under de senaste decennierna. Bl a kan nämnas:

- De har gjorts mycket mer tilltalande.
- De är inte bara exempelsamlingar utan innehåller också beskrivande partier.
- De har ett bredare urval av tillämpningsuppgifter. Samhällskontakten är bättre.
- Uppgiftstyperna är mer varierade.
- Diagnostiska prov är vanliga.
- Större material-metod-system har tagits fram.
- De är inte så systematiskt uppbyggda genom uppgifter i successivt stegrad svårighetsgrad.

Den sistnämnda bristen har bl a påtalats av Kihlborn m fl (1977).

För svensk del innebar IMU-materialet en förnyelse. Det var självinstruerande - utan att vara programmerat - och helt individualiserande. Författarna byggde på erfarenheter från korrespondensundervisning. Det visade att eleverna kunde tillägna sig acceptabla kunskaper genom materialet men att lärarens roll blev oklar. IMU-materialet var ett av de mest långtgående försöken att använda undervisningsteknologiska principer vid produktionen. Liksom andra smärre försök i den vägen har det inte visat sig särskilt framgångsrikt.

Det föreligger stora svårigheter att bedöma kvalitén - eller åtminstone försäljningsframgången - hos ett redan framtaget läromedel. Läromedelsförfattandet får därför anses fortfarande befinna sig i "hantverksstadiet". Det är svårgripbara faktorer som läromedlets "charm" och hur det fungerar i lärarnas och elevernas händer som är avgörande för framgången. Därmed följer också att möjligheterna för läromedelsförfattarna att styra utvecklingen är små. De måste i hög grad tänka och handla marknadsanpassat. Det lärarna - och eleverna - vill ha det måste författarna skriva. Liksom i andra hänseenden blir det därför vissa svårgripbara faktorer som styr, som är att hänföra till klassrummets - och i övergripande hänseende skolans - sociologi. Faktorer som reklam och om läromedlen distribueras i tid påverkar också valet.

De läromedel som i dag används i matematik är sinsemellan relativt lika. Alla har lagt sig vinn om att noga följa läroplaner och läroplanssupplement. Den tidigare läroboksnämnden och numera granskare på kommunal nivå har sett till att så sker.

Läromedelsförfattarnas roll som maktfaktor får därför anses som relativt begränsad. Trots den ytligt sett stora förnyelsen av läromedlen går undervisningen till som förut. Eleverna löser uppgifter i en sällan sinande ström.

Utvecklings- och forskningsgrupper

Att matematikundervisningen går till som den gör i dag beror huvudsakligen på de empiriska erfarenheter som gjorts genom seklers undervisning. Det är mycket liten påverkan som skett från den pedagogiskt-metodiska forskningen. Det beror bl a på att det är svåra forskningsfrågor att attackera. För övrigt finns det i Sverige knappast några resurser alls för en sådan forskning.

Utvecklingsarbete av olika slag har jämfört med forskningen haft ett större inflytande. Ta t ex införandet av den nya matematiken. Den importerades till Sverige i början av 1960-talet genom Nordiska matematikkommittén. Denna kommitté kom att spela en ideologiskt ledande roll under 1960-talet. En annan betydelsefull grupp var knuten till IMU-projektet. Under senare år har tankar kring PUMP-projektet, som bl a har behandlat behovet av systematik vid inlärningen av algoritmräknandet, varit uppmärksammade. Vissa grupper har arbetat med att knyta tillämpningar till matematikundervisningen, dock utan påtagliga framgångar.

Utvecklingsgrupper har varit betydelsefulla som ideologiska förnyare. Deras faktiska inflytande är dock litet. Matematikundervisningen är i sina huvuddrag upplagd som den alltid har varit.

Politiker, press, radio- och TV-folk

Dessa har i stor utsträckning medverkat till och fört ut skolans omgestaltning. Däremot har de endast obetydligt bidragit vid frågor angående konsekvenserna för matematiken. De har dock med något enstaka undantag försvarat matematikens roll som viktigt skolämne.

Historien kring den nya matematiken i Sverige

För att ytterligare belysa vilket inflytande olika makthavare har har det sitt intresse att skärskåda vad som hände i samband med att den nya matematiken infördes. Med den nya matematiken avser jag då ändringen i kursinnehållet och i begränsad utsträckning arbetsformerna. Däremot lämnar jag i detta sammanhang åt sidan inverkan från ändringar i ramar såsom annorlunda elevstruktur, skolsystem och timtal.

1 Kursinnehållet i skolmatematiken hade 1960 varit statiskt i många år. Det hade bara i begränsad utsträckning anpassats till samhällets utveckling. På högstadiet ifrågasatte nu många lärare bl a det överdrivna ekvationslösandet och handelsräkningen. På gymnasiet var det geometrin och kägelsnitten som främst ifrågasattes. Resultaten var inte heller så lysande, vilket ingav bekymmer. Det fanns därför inom matematiklärarkåren en vilja till förnyelse.

2 I slutet på 1950-talet uppkom den internationella rörelsen "den nya matematiken". Den tog fart i USA i samband med sputnikhysterin 1957. 1959 hölls en mycket betydelsefull konferens i Royaumont (OEEC, 1961), som innebar starten för Europas del.

Internationellt sett fanns på 1960-talet en stark tilltro till utbildningens möjligheter. OECD och andra organ betonade att en förstärkt och förbättrad utbildning var en viktig väg mot ekonomisk

tillväxt (Ahlström, 1977). Utbildning bedömdes vara en lönsam investering. Hur skulle då utbildningen läggas upp? Det existerade just då en misstro mot behavorismen och ökade förhoppningar knöts till den kognitiva psykologin. Man betonade förståelsens roll. Uppmärksamheten mot Piaget och hans idéer växte. Bl a betonades användning av laborativa material och ett mer intellektuellt inriktat studium av strukturer. Med den framväxande utbildningsteknologin uppmärksammades mål, process och resultat som principiellt viktiga beståndsdelar i utbildningsstrukturen. För matematikens del konstaterade man dåliga resultat - ungdomar hade svårt för eller ville inte lära sig matematik. Man såg optimistiskt på möjligheterna att förändra processen, dvs förbättra undervisningsmetoderna. Fackmatematiker och matematikmetodiker framträdde med bestickande idéer: mängdlära, laborativa material, principiellt studium av positionssystem, betonande av strukturer som t ex funktionsbegreppet. Partiellt med detta talade man för en förändring av målet mot en bättre samhällsanpassning: statistik och sannolikhetslära, diagram och tabeller, datorer och andra typer av praktisk matematik. Motiven för en reformrörelse var bestickande. Världen accepterade den nya matematiken.

I nästan alla länder knöt man stora förhoppningar till den nya matematiken. Det skulle lösa just det landets problem. Det märkliga var att dessa problem var mycket olika i de olika länderna. I vissa länder uppfattades matematiken som för teoretisk i andra som för löslig. På vissa håll hade man för mycket tillämpningar i andra för få. Ibland uppfattas skolans differentiering som för stark, ibland som för svag. Och alla såg den nya matematiken som räddningen. Med denna utgångspunkt är det inte att förvåna sig över att införandet ledde till besvikelser. Sarason (1972) anser att det berodde på bristande förståelse för skolans kultur. Se vidare sid 185.

3 De nordiska deltagarna vid den betydelsefulla Royaumont-konferensen 1959 startade vid hemkomsten den Nordiska kommittén för modernisering av matematikundervisningen. Uppenbarligen fanns ett stort intresse inom de skolansvariga myndigheterna och inom Nordiska kulturkommissionen. Kommittén, som bedrev en omfattande försöksverksamhet under 1960-talet, lade fram sin slutrapport 1967: "Nordisk skolmatematik" (1967). Kommitténs ledamöter var matematiker, lärare på olika stadier, några var utbildningsadministratörer som tidigare varit matematiklärare, en industrirepresentant och en professor i pedagogik. Jag var sekreterare i kommittén. Som experter till kommittén knöts en rad lärare, metodiklektorer samt pedagoger och psykologer. Kommitténs arbete var starkt matematiskt förankrat och hade en klar internationell orientering. Arbetsformerna påverkades föga och de medverkande beteendevetarna avrådde från försök att jämföra resultaten av den gamla och den nya matematiken.

Lgr 62 tillkom alldeles i början av kommitténs arbete. Lgr 62 var därför mycket avvaktande vad gäller matematik. Däremot hade kommittén desto starkare inflytande på gymnasie- och fackskoleutredningarna och på Lgr 69.

4 Gymnasieutredningens huvudsekreterare var matematiker och ordförande i Nordiska matematikkommittén. Flera av gymnasieutredningens experter i matematik hade anknytning till kommittén. Uppenbarligen åtnjöt kommittén förtroende hos de politiker och andra beslutsfattare som utsåg experter. Kommitténs idéer låg alltså till grund för det nya kursinnehåll som gymnasieutredningen föreslog. Det tillstyrktes i stort av remissinstanserna och det kursinnehåll som regering och SÖ slutgiltigt fastslog i mitten på 1960-talet var i allt i enlighet med vad matematikkommittén arbetat för.

5 Något år senare började SÖ arbeta på en reform av grundskolan, som alltså resulterade i Lgr 69. Hur arbetet med framtagningen av det nya kursinnehållet i matematik gick till har beskrivits i en rapport (Kihlborn m fl, 1977). Tyvärr är den grovt osaklig och ibland pinsamt insinuant. Bl a sammanblandas SPA-gruppen och ämnesgruppen i matematik på ett helt förvirrande sätt. Jag anges felaktigt som gruppens ordförande osv. Kihlborn säger att ledamöterna i gruppen "togs ut inom någon eller några personers närmaste vänkrets och inte genom rationellt val .....". I själva verket får man uppfatta valet av ledamöter i matematikgruppen som rationellt. SÖ hyste uppenbarligen en starkt tilltro till matematikkommittén (och dess ordförande som nu var departementsråd), som varit ansvarig för den nya matematik som just införts i gymnasiet. Man valde några ledamöter från kommitténs krets och kompletterade med några andra lärare och en person med pedagogisk-ämnesmetodisk forskarerfarenhet.

6 Matematikgruppen hade en svår uppgift med många besvärliga avvägningar. Den lade fram ett förslag som måste uppfattas som radikalt och som innebar en stor nyordning. SÖ föreslog i läroplansöversynen (SÖ, 1967) att den gamla och nya matematiken skulle existera parallellt men ändrade senare inställning. Förslaget gick ut på remiss och vållade en hel del diskussion och vissa delade meningar. Bl a anfördes att förslaget var för "matematiskt avfattat" och borde innehålla mer konkreta förslag till hur undervisningen borde bedrivas. Jag hade själv medverkat till att förslaget blivit så pass systematiskt logiskt utformat för att det klart skulle framgå vilka inlärningssteg som måste tas för att konsekvent bygga upp elevernas kunskaper. Vidare hyste jag då en stark tilltro till en förståelseinriktad matematikundervisning (jag var för spikinlärande). Däremot var jag klart medveten om att de metodiska erfarenheterna om hur en förståelseinriktad undervisning borde bedrivas var starkt begränsade och jag ville därför inte i supplement och anvisningar ge detaljerade förslag som kanske inte på sikt skulle visa sig hålla måttet. Denna tankegång avspeglades också i det stora fortbildningsprojektet Delta, som endast i liten utsträckning tog upp metodiska frågor utan som koncentrerade sig på att göra lärarna orädda för de matematiska nyheterna.

SÖ var emellertid mycket angelägen att tillmötesgomma önskan om mer detaljerade anvisningar. Dessa utarbetades men tyvärr relativt hastigt. Momenten kvarstod dock som i matematikgruppens förslag. Det slutliga matematikinnehållet i Lgr 69 kom alltså att starkt påverkas av matematikkommittén. Det hade bl a den konsekvensen att grundskolans matematikundervisning blev mer matematisk. Hur kunde nu en så pass radikal och ämnescentrerad reform få en uppbackning från skolpolitikernas sida?

Jo, den nya matematiken blev något av en frälsningslära. Till den knöts stora förhoppningar att den skulle hjälpa folket att lära sig riktig och väsentlig matematik. Man tog avstånd från drill. I stället skulle man bygga på förståelse och i högre grad utnyttja varje elevs inneboende förmåga. Stoffinnehållet och tillämpningarna skulle göras moderna och samhällsanpassade. Detta var precis vad politikerna önskade. De mer framsynta politikerna insåg förmodligen att man hade allt att vinna och inget att förlora genom att införa den nya matematiken. Skulle den hålla vad den lovade skulle det vara en stor framgång för skolan. Skulle det gå dåligt hade man något att skylla ifrån sig på. Under alla omständigheter var den nya matematikens mål så skilt från den dåvarandes att det avsevärt skulle försvåra jämförelser med den "gamla" skolan.

När det på 1970-talet framkom omfattande klagomål på elevernas matematikkunskaper blev det mycket riktigt så att politikerna skyllde på den nya matematiken. Både företrädare för den socialdemokratiska och den borgerliga regeringen har gjort det vid flera tillfällen. Genom lärarnas och avnämarnas initiativ ledde det till att utbildningspolitikerna - inom och utom SÖ - utsåg andra matematikundervisningsexperter att vidta modifikationer.

7 Översiktligt var alltså förloppet följande: Bland matematiklärarna fanns en latent stämning för förnyelse. Den förstärktes och gavs innehåll av den internationella rörelsen "den nya matematiken". Skolpolitikerna fann idéerna bestickande och gav företrädare för rörelsen chans att utforma kursplaner. Lärarna accepterade att börja arbeta efter dem men fick dem sedan starkt modifierade. De främsta makthavarna var dels de skolpolitiker som lät den nya matematiken få en chans dels de lärarföreträdare som dämpade dess effekter. De s k matematikundervisningsexperterna får närmast rollen av marionetter som uppträder på scenen när de lyfts fram. Kihlborn har i sin rapport oproportionerligt förstorat upp vissa händelser, som utgör irregulariteter i en utveckling, som styrs av bakomliggande krafter som Kihlborn helt förbiser.

Slutord

Man frågar sig vilka personer som skapar utbildningspolitiken. De finns i regering, som politiska tjänstemän i departmenten, i de politiska partierna, i arbetsgivar- och arbetstagarorganisationer, inom press, radio-TV, osv. En politisk roll spelar också de fasta tjänstemännen på utbildningsdepartementet och SÖ:s personal. Det finns de som hävdar att just SÖ:s personal utgör en mycket viktig skolpolitisk maktfaktor och att skolan även politiskt skulle styras av "skolbyråkrater".

Det har inte varit lätt för de skolpolitiskt ansvariga att komma överens om de övergripande riktlinjerna för svensk skola. Ändå har man i debatterna arbetat på ett principiellt plan och haft - medvetna och omedvetna - överslätningar av skolans komplicerade verklighet som grund. De beslut som fattats har sedan på papperet förefallit entydiga. Det har de emellertid ofta inte

varit. SÖ har haft den kinkiga uppgiften att omsätta principbesluten i den praktiska verksamheten och att genomföra alla följdbeslut som fordras. Det är ofta dessa följdbeslut som är de i praktiken viktigaste och som påverkar skolans personal och eleverna starkast. Detta ger också intrycket att det är i SÖ som skolpolitiken drivs. Det är ganska självklart att SÖ i sin personalpolitik försöker välja experter med god förankring i den aktuella skoldebatten; experter som anticiperat de politiska besluten inom sitt område och genomfört dem på det sätt det svenska samhället önskar. Det kan då ibland hända att SÖ - sett i ett längre eller kortare perspektiv - väljer "fel" experter eller att dessa driver sina idéer för långt.

SÖ:s experter - antingen de är fast anställda eller bara medverkar vid tidsbegränsade uppdrag - utgör en mycket heterogen skara. De består bl a av lärare som i sin undervisning arbetat på ett framsynt sätt. Genom att de engageras i SÖ får de kontakt med fler personer med liknande idéer. De förstärks i sin inställning och börjar driva den med allt större kraft; kanske till båtnad för svensk skola, kanske till nackdel.

Experternas roller kan illustreras av matematikens behandling i SÖ.

- På 1950-talet leddes SÖ-matematiken av ett undervisningsråd som slog vakt om det bestående. Experter valdes med främsta uppgift att försöka föra vidare till de nya skolformerna så mycket som möjligt av det redan etablerade och utprövade.

- På 1960-talet knöts förhoppningen till den nya matematiken. Experterna valdes som vi sett med nära anknytning till Nordiska matematikkommittén.

- På 1970-talet hade den nya matematiken svikit förhoppningarna. Basfärdigheter och anknytningen till den faktiska situationen ute i landets skolor blev det centrala. Fortbildningskonsulenterna blev SÖ:s främsta rekryteringskälla.

Den viktigaste orsaken till att skolans matematikundervisning ändrats är skolans allmänna omgestaltning. Därvid har skolpolitiker och massmedia spelat huvudrollen. Dessa grupper har också haft huvudansvaret för att uppfattningen om matematikens viktiga roll i samhället bevarats och därmed dess roll som betydelsefullt skolämne.

Vid anpassning av matematikundervisningen till de förändrade villkoren har expertgrupper och SÖ-personal haft viktiga roller. Utvecklingsgrupper har varit idéspridare. Den betydelsefullaste faktorn har dock lärarna och eleverna som kollektiv varit. De har utgjort de ramar inom vilka skolmatematiken har kunnat förändras. Fortbildningskonsulenter och läromedelsförfattare har fångat upp utvecklingen i klassrummet och omsatt den i åtgärder.

Sammanfattningsvis konstaterar jag att de starkaste makthavarna är de som med kraft kunnat företräda samhället eller kollektivet lärare-elever.

2.3 Matematikutbildning för teknologer och ingenjörer

Denna del består av fem avsnitt i vilka matematikutbildningen för teknologer och ingenjörer diskuteras ur olika aspekter. I dessa avsnitt finns underrubrikerna "Ämnesföreträdarna", "Teknologerna", "Matematiklärarna" samt "De yrkesverksamma". Där redovisas synen från respektive grupp på delaspekten i fråga. Därvid utnyttjas de enkätresultat som presenterats i "Sju enkäter om matematikundervisning" (Håstad, 1977), i fortsättningen kallad "Sju enkäter" samt de intervjuer och samtal jag genomfört. För att få en överblickbar situation har jag därvid koncentrerat mig på den maskintekniska utbildningslinjen vid Tekniska högskolan i Stockholm. Mina iakttagelser och resonemang är emellertid generaliserbara till många andra utbildningslinjer med motsvarande matematikbehov.

Varje avsnitt avslutas med en sammanfattande analys. Jag återkommer i tredje kapitlets andra del till matematikutbildningen vid den tekniska högskolan. Där formulerar jag bl a 15 PRINCIPER inför 1980-talets utbildning.

2.3.1 STOFFINNEHÅLL

Matematikbehovet - en självklarhet

Att en ingenjör behöver kunskaper i matematik är självklart. Vid studiet av teknik använder man modeller av olika slag som beskriver det tekniska förloppet. Dessa modeller är i stor utsträckning matematiska. Matematiska kunskaper fordras för att ingenjören ska kunna

- förstå det tekniska förloppet. De lagar som gäller utnyttjar vanligtvis matematiska begrepp och matematisk symbolism.
- utföra beräkningar och lösa tekniska problem. I de flesta sammanhang behandlas det tekniska förloppet numeriskt.

Det råder heller ingen oenighet om att ingenjören behöver kunna matematik. Frågan är vilken matematik det gäller, hur ingående den behöver kunnas och hur matematikundervisningen bör läggas upp.

Den matematikutbildning vi har vid de tekniska högskolorna har vuxit fram genom en växelverkan mellan olika faktorer och påverkats av ställningstaganden - medvetna eller omedvetna - från olika grupper av personer. Traditionerna har spelat en stor roll och de internationella förebilderna är många.

Vem fastställer matematikkurserna?

Rent formellt fastställs innehållet i den matematikutbildning som ingår i den högre tekniska utbildningen i Sverige av vederbörande linjenämnd. För genomförandet av matematikundervisningen ansvarar sedan en institution - i allmänhet institutionen för matematik. Före 1977-07-01 fastställdes innehållet formellt av UHÄ (UKÄ) på förslag av vederbörande utbildningsnämnd och högskola.

Trots linje-(utbildnings-) nämndens formellt starka ställning är valmöjligheterna i praktiken inte så stora. En rad faktorer begränsar alternativen:

- Det finns en starkt förankrad praxis hur matematikundervisningens innehåll bör vara. Linjenämnden saknar i allmänhet kompetens att ifrågasätta större avvikelser från denna.

- Institutionen bestämmer i alla "praktiska" frågor och har därmed makten i sådana viktiga frågor som undervisningens uppläggning, val av lärare och tentamenskrav.

- Matematiken är inklämd mellan å ena sidan gymnasieskolan och å andra sidan de tillämpade ämnenas krav. Den nivå matematikundervisningen kan utgå ifrån är helt beroende av teknologernas förkunskaper från gymnasieskolan. Samtidigt har de ämnen som använder matematik krav på att teknologerna snabbt ska tillägna sig den nödvändiga "högskolematematiken". Detta låser matematiken starkt.

- De lärare som finns anställda vid en högskola måste utnyttjas. Linjenämnden blir därigenom - på både gott och ont - beroende av deras inställning.

Vad avgör om ett moment ska tas med?

När man står inför övervägandet om ett visst moment ska tas med i en matematikutbildning eller ej kan följande situation förekomma.

- Momentet är oundgängligen nödvändigt för att man ska kunna tillgodogöra sig ett annat moment inom matematiken som behövs för den fortsatta utbildningen. De matematiska momenten är ofta hierarkiska.

- Momentet krävs för att man ska kunna tillgodogöra sig ett moment inom ett annat grundläggande ämne inom den fortsatta utbildningen.

- Momentet används i ett tekniskt ämne i den fortsatta utbildningen.

- Momentet kan behövas under den framtida yrkesutövningen.

- Momentet kan kanske behövas i fortbildningssammanhang.

Valet av predikat har gjorts så att det illustrerar en typisk situation: ju längre fram i tiden en användning finns ju osäkrare blir den och ju tveksammare blir det om användningsmöjligheten bör påverka om momentet ska tas med eller ej.

Skäl mot att ta med ett moment är bl a

- att det är osäkert om momentet verkligen kommer att användas på grund av att användningen ligger långt fram i tiden

- att endast en mindre del av de studerande kommer att använda det

- att momentet visserligen används senare under utbildningen men på ett flyktigt eller perifert sätt

- att utbildningstidens längd lägger hinder i vägen i så måtto att andra studiemål ges högre prioritet

- att utbildningen blir för teoretiskt-matematisk

- att det är så svårt för många teknologer att tillägna sig momentet att det finns ökad risk för studieförsening eller studieavbrott.

Den användning som i praktiken är lättast att beakta är om momentet behövs i fortsättningen av själva matematikutbildningen. Det är ju ett internt matematiskt problem som kan avgöras av matematiklärarna själva. Vissa delade uppfattningar kan råda om ett moment, t ex ett hjälpbegrepp eller ett bevis som används för att lägga en ordentlig teoretisk grundval för ett senare matematiskt moment, verkligen behövs eller om man kan stöda sig på intuitiva resonemang.

Behoven av matematik i de övriga ämnena inom den högre tekniska utbildningen kan kartläggas av företrädare för dessa ämnen vid högskolorna. Även teknologerfarenheter är viktiga att beakta.

Svårast att beakta är yrkesanvändningen av matematik och fortbildningsbehovet. Olika typer av återkopplingsorgan till de tekniska högskolorna existerar, bl a utbildningsråden. Vissa undersökningar har genomförts.

Ämnesföreträdarna

I enkäten till ämnesföreträdarna på M-KTH presenterades de för en lista med ca 70 matematiska moment och de ombads att skatta behovet av varje moment för undervisningen i sitt ämne. Skattningen skulle göras i en fem-gradig skala. De skulle också ange moment där teknologerna visade brister. Resultatet redovisas på sid 83 - 91 i "Sju enkäter".

Huvudintrycken från denna skattning är:

o I den uppdelning av momenten i fyra delmängder som kan göras på grund av skattningen bildar 17 moment en delmängd, som består av de moment som bedömts som viktigast. Samtliga dessa 17 moment behandlas redan i gymnasieskolans matematikkurs. De ingår sedan också i matematikkursen på M-KTH där de fördjupas.

o De moment där ämnesföreträdarna noterar brister hos teknologerna faller uteslutande på relativt viktiga moment. Det är alltså inte så att matematikkursen bedöms som för smal. Det ges med andra ord orientering i tillräcklig grad. Däremot brister inte sällan färdigheten.

Ämnesföreträdarna fick också vissa andra frågor som avsåg målet för matematikundervisningen. Av svaren framgår

- att det är mycket viktigare att teknologerna kan skolmatematiken än högskolematematiken
- att det är viktigt att kunna genomföra logiska resonemang
- att man är nöjd med ett relativt standardbetonat kunnande; att kunna använda egna metoder, att lösa nya problem eller att lämna matematiska redogörelser är inte ett så centralt krav
- att man är nöjd med matematikens nuvarande omfattning och inte tror på några ändrade krav under den närmaste framtiden.

Teknologerna

M-teknologerna fick skatta matematikanvändningen enligt samma momentlista som ämnesföreträdarna. Resultatet redovisas på sid 83 - 91 i "Sju enkäter". Samma huvudtendenser gick igen i de båda gruppernas skattningar. Lärarna lade något större vikt vid räknefärdighet och begreppsförståelse och teknologerna vid metodkännedom. De moment, som teknologerna skattade som viktigare än lärarna, var i allmänhet mer kvalificerade medan alltså lärarna var mer angelägna om jordnära kunskaper.

Av andra frågor i enkäten och ur intervjuer framgick att teknologerna är rätt nöjda med matematikkursens omfattning. Nästan samtliga ansåg att andra ämnen inte använde matematik till övermått. I intervjuerna frågade jag om man skulle ha kunnat klara M-utbildningen bara med gymnasieskolans matematik. Alla avvisade denna tanke, några dock med tvekan. Man menade att högskolekursen egentligen bara innebar att man lärde sig skolkursen bättre och fick orientering om vissa mer avancerade matematiska begrepp. Man hade inte i tillämpningsämnena behövt moment som inte behandlats i matematiken - däremot hade det ibland behövts bättre färdighet i t ex differentialekvationer och numeriska metoder. Några av de intervjuade tyckte att de andra ämnena inte till fullo utnyttjade vad de lärt sig i matematik; någon sade t o m att de använde genant lite matematik. Ett exempel gäller vektorer. I matematik- och mekanikkurserna lär sig teknologerna ett allmänt vektorbegrepp. I många tillämpningsämnen räknar man trots det hela tiden i koordinatform och arbetar i planet när man med vektorframställning kunde arbeta tredimensionellt.

Vid M-utbildningen på KTH tillhör man i de två högsta årskurserna en av 14 stomplanelinjer. Dessa ställer olika krav på matematik. Det är emellertid endast små skillnader mellan skattningarna för de 70 matematikmomenten för teknologerna från de olika linjerna. Intervjuerna gav också belägg för att den stora matematikanvändningen låg i ämnen som läses innan uppdelningen i stomplanelinjer, såsom t ex hållfasthetslära, maskinelement, fysik, mekanik, matematisk statistik, mekaniska servosystem och numeriska metoder. Detta bekräftas också om man räknar på den tid som läggs ned på tillämpning av matematik (se sid 54 - 57 i "Sju enkäter").

Matematiklärarna

Matematiklärarna säger sig vara nöjda med kursens omfattning och förklarar sig beredda att försöka bibringa teknologerna matematikkunskaper inom de områden som linjenämnden och de övriga M-lärarna önskar. Från matematikerhåll har det generellt sagts att man är beredd att acceptera vilka matematikmoment som helst så länge man får möjlighet att undervisa dem på ett matematiskt "hederligt" sätt.

De yrkesverksamma

I enkäten till 350 yrkesverksamma M-ingenjörer framkom att de använder matematik relativt sällan i sin yrkesverksamhet. Den matematik de använder ligger ofta högst på gymnasienivå men alla typer av högskolematematik är också representerade. De yrkesverksamma har heller inte något större behov av matematik utöver högskolekursen för sin fortbildning.

Majoriteten av de svarande är nöjda med sin högskoleutbildning inklusive matematikdelen. Den del av matematiken man sade sig ha haft mest nytta av är överslagsräkning och logisk förmåga följt av förståelse för matematiska begrepp. Däremot bedömer de algebra och metodkunskaper som mindre angelägna. De öppna svaren innehåller många tips angående kursinnehållet.

De svarande uppdelades i fyra grupper med hänsyn till sina arbetsuppgifter: tekniskt arbete, företagsledning, undervisning och icketekniskt arbete. Enkäten visar vissa skillnader mellan de olika gruppernas matematikanvändning. Mest särpräglade är undervisarnas behov. Att låta denna skillnad föranleda en differentiering av högskoleutbildningen är dock knappast aktuellt. Man vet ej i förväg vilka arbetsuppgifter en person kommer att få. Det är också en generationsfråga inblandad: i yngre år har ingenjörerna oftare rent tekniska uppgifter och många blir företagsledare som medelålders. Ingen av de svarande önskar heller en differentiering av utbildningen.

Sammanfattande analys

Enkäten med de yrkesverksamma visar att den direkta matematikanvändningen är låg under ingenjörsarbetet. Den matematik som används är dock av samma typ som den som behövs för de fortsatta studierna. Detta torde gälla alla typer av ingenjörsutbildning. En mer detaljerad undersökning (Dahllöf, Håstad, 1967) visade en mycket nära överensstämmelse mellan yrkeslivets krav på matematik och den fortsatta utbildningens krav samt att det senare behovet var mycket större. Inom ämnesområdet statistik och sannolikhetslära är dock yrkeskraven relativt sett större. Bortsett från detta område kan man alltså koncentrera sina undersökningar om matematikbehovet till att kartlägga behoven hos de övriga ämnena i den fortsatta utbildningen.

Genom "Sju enkäter" har man fått en relativt detaljerad bild av vilken matematik som dessa ämnen behöver. Man kan överväga att komplettera denna bild med en genomgång av läromedel, tentamina, laborationsuppgifter som förekommer i dessa ämnen. Det finns emellertid flera skäl att tro att en sådan genomgång, som ju är mycket mödosam, har föga att ge.

Ta först fallet att man vid en läromedelsgenomgång finner att ett matematikmoment A används:

- Det kan vara så att förståelse för momentet A är helt nödvändigt för att tillgodogöra sig ämnet i fråga.

- Det kan vara så att momentet används mer i förbigående. Det innebär inget väsentligt hinder för teknologen att klara det tekniska ämnet utan att känna till - långt mer behärska - den matematiska metoden. Tvärtom kanske det skulle innebära en tidsförlust och en avledning av huvudintresset om teknologen försökte sätta sig in i den matematiska metoden. Metoden är kanske föråldrad eller har medtagits på grund av någon ideosynkrasi hos läroboksförfattaren, som kanske stått under för stark påverkan av den matematik vederbörande lärt sig för länge sedan.

- Det troliga är emellertid att momentet A intar en mellanställning och inte är absolut nödvändigt men inte helt meningslöst. Man kanske kan klara sig utan det om man använder en alternativ metod. Denna leder kanske till önskemål om andra matematikmoment och man hamnar i en svåröverblickbar karusell. Hur avgör man då om det ska vara med?

Ta sedan fallet att matematikmomentet A inte används i något läromedel.

- Det kan vara så att det borde ha använts. Läromedlet är kanske föråldrat och det hade inneburit en stor vinst för ämnet om det vore med. Det fordras ingående kunskaper i ämnet för att fälla ett sådant avgörande.

- Det kan vara så att momentet inte borde ha använts. Nu kan det vara på det sättet att när man arbetar med att tillägna sig momentet A har man använt matematikmomentet B. Det kan till och med vara så att det är först sedan man tillämpat momentet B i samband med arbetet med moment A som man fått sådan förståelse för moment B att man kan använda det i tillämpningen i andra ämnen. Och momentet B är kanske nödvändigt i tillämpningsämnena. Därigenom behövs indirekt också momentet A.

Ovanstående resonemang visar det omöjliga i att från teoretisk utgångspunkt analysera vilka matematikmoment som behövs. Momenten hänger samman på ett för komplicerat sätt och det går heller inte att hitta objektiva kriterier för att avgöra betydelsen av varje moment.

I detta läge är man hänvisad till de empiriska erfarenheterna och de förmedlas framför allt av lärare och teknologer. Mot denna bakgrund har jag valt att basera min kartläggning av matematikbehovet på enkäter och intervjuer med dessa grupper. Jag är väl medveten om nackdelarna med detta förfarande. Ett ofrånkomligt mått av subjektivitet kommer in i bilden. Bl a blir resultaten starkt beroende av de svarande ämnesföreträdarnas egen utbildning, framför allt i matematik. Vanföreställningar kan bli bestående.

Lärarna är starkt påverkade av dagens utbildningssituation. Men den har ju inte tillkommit av en slump. En lång empirisk process har lett fram till den. Många olika intressentgrupper har varit inblandade : teknologer, matematiklärare, företrädare för avnämarämnen, yrkesverksamma ingenjörer och i periferin utbildningspolitiker och allmänheten. Det har slagits larm om missförhållanden och reformansträngningar har lett till andra typer av modifikationer.

Det finns all anledning att hysa respekt för det resultat som denna process har lett till - och kommer att leda till i framtiden. Den ämnesmetodiskt-pedagogiska vetenskapen har i sitt nuvarande utvecklingsskede små möjligheter att styra utvecklingen. Den får inskränka sig till att studera den process det är fråga om och hjälpa till att påtala när den leder till icke önskvärda resultat eller har negativa bieffekter.

I stora drag är det emellertid ganska givet vilket stoffinnehållet i matematikutbildningen bör vara. I de ämnen som utnyttjar matematik finns nämligen vissa matematiska begrepp och metoder som är helt fundamentala och om vilka man kan nå stor enighet i alla lägen att de är "ett måste". Några exempel på formler använda vid M-utbildningen, som visar vilka begrepp och metoder det kan gälla, ges nedan.

$$\oint E d\bar{s} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\frac{d}{dx}\left(h^3 \frac{dp}{dx}\right) = 6\eta V \frac{dh}{dx}$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

$$p_n(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \qquad x \in \{0,1,\ldots n\}$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_o^2 x = g(t)$$

$$m = \iiint_V \varrho \, dxdydz = \int_V \varrho \, dV$$

$$\bar{Z} = R + j\omega L = Z e^{j\omega\varphi}$$

Man kan avslutningsvis konstatera att de matematikmoment, som nu ingår i undervisningen på M-KTH, accepteras i sina huvuddrag av de inblandade parterna. Detta är enligt mitt förmenande ett tecken på att de utgör en godtagbar matematikkurs. Det finns emellertid ingen anledning att slå sig till ro och vara nöjd. Momenturvalet kan säkert förbättras. Det behövs med hänsyn till defekter som visat sig och med hänsyn till ändringar i målsättningen. Det finns all anledning att gå försiktigt fram och noga observera de konsekvenser ändringarna för med sig så att motåtgärder kan sättas in. Bl a bör man noga lyssna till lärarnas erfarenheter.

2.3.2 ATT TILLÄMPA MATEMATIK

Av särskilt intresse för matematikutbildningen vid en teknisk högskola är delmålet tillämpningsförmåga. Begreppet matematisk modell spelar därvid en viktig roll. För en precisering av begreppets innebörd se avsnitt 1.2.1. Närmast följer en sammanfattning av de olika kategoriernas inställning enligt svaren i "Sju enkäter" och intervjuer m m.

Ämnesföreträdarna

Av enkäten framgår att ämnesföreträdarna har relativt blygsamma krav på teknologernas tillämpningsförmåga. De tycker att begreppet matematisk modell är viktigt samt att teknologerna känner de viktigaste matematiska modellerna i ämnet och kan tillägna sig de matematiska delarna av kurslitteraturen så att de kan beskriva tekniska förlopp i matematiska termer, bl a för att lösa tekniska problem. Någon avancerad förmåga eftersträvas ej. Ämnesföreträdarna anser uppenbarligen inte att det är nödvändigt att matematikutbildningen ger en matematikkompetens med förmåga att självständigt använda matematiken som ett instrument utan mer som en grund för att följa den tekniska framställningen. Det förväntas eller krävs inte att teknologerna själva ska välja den matematik som behövs utan det räcker om man arbetar efter förebilder.

Enkäterna och konferensen "M och matematiken" (Håstad, 1977) (se sid 197) visar att ämnesföreträdarna i allmänhet är nöjda med matematikundervisningen vad gäller tillämpningar. Till bilden hör då att teknologerna knappast alls lär sig att tillämpa matematik under själva matematikundervisningen. Ansvaret ligger för närvarande helt på ämnen som använder matematik, framför allt ämnen i lägre årskurser som mekanik, numeriska metoder, hållfasthetslära, maskinelement och fysik. Ämnesföreträdarna accepterar alltså detta förhållande, som i deras ögon har den fördelen att de själva kan bestämma inriktning och omfattning. Detta innebär emellertid också att dessa ämnen får ta över en del av färdighetsträningen, vilket också avspeglas i att ämnesföreträdarna oftast påtalar brister i teknologernas kunskaper.

Teknologerna

I enkäten tillfrågades de om vad det berodde på om de - till äventyrs - hade svårigheter att tillämpa matematik. Högst på listan kom då

- att jag glömt matematiska formler och metoder
- att mina beräkningar blir för omfattande, eftersom jag ej alltid hittar de bästa metoderna
- att läroböcker, lärare och assistenter i tillämpningsämnena inte förklarar tillräckligt klart.

Att just dessa svårigheter kom så högt förefaller peka på att teknologerna upplever problemet att tillämpa matematik som stort. När man säger sig ha "glömt" så ligger det nog mera bakom än ren glömska. Ofta har man inte smält det matematiska stoffet tillräckligt utan kunskaperna är för ytliga. Man har emellertid orienteringskunskaper, som gör att man tycker man borde kunna uppfylla de krav som ställs. Att beräkningarna blir omfattande kännetecknar också en person med vaga kunskaper. Klagomålet på lärare och läromedel är också naturligt om ens grunder är något osäkra.

I intervjuerna framkom att teknologerna i allmänhet är nöjda med sina matematikkunskaper men att de upplever dem som något isolerade. De berättade att det inte ställts några krav på att de skulle kunna tillämpa kunskaperna under själva matematikkurserna. Och kraven från de andra ämnena var inte heller så accentuerade. I allmänhet ansåg teknologerna att det var tillräckligt med ett passivt, standardbetonat matematiktillämpande. Den potential de fått genom matematikundervisningen utnyttjades bara delvis. Å andra sidan hade det heller inte inträffat att de i andra ämnen behövt matematik som de inte mött. Om ett matematikmoment fordrades i ett annat ämne var det behandlat i matematiken.

På förfrågan vad man trodde om samarbetet mellan matematiker och företrädare för andra ämnen var den allmänna inställningen att lärarna från den matematiska institutionen var relativt isolerade och att de inte träffade tillämpare så ofta. Man ansåg dock allmänt att innehållet i matematikkurserna fixerats utifrån tillämpningsämnenas krav.

Teknologerna efterlyste fler tillämpningsuppgifter under matematikundervisningen - "inte så många men så att man ser vad matematiken är bra för". Deras krav i detta hänseende var modesta. Någon stödde tanken på att flytta ner fler tillämpningsämnen i första årskursen. Däremot var man mer tveksam till att flytta upp matematikmoment till de båda högsta årskurserna.

En statistisk s k komponentanalys av teknologernas enkätsvar ger följande komponenter som får anses spela en avgörande roll då det gäller teknologernas förmåga att tillämpa matematik.

1 Goda matematikkunskaper i allmänhet

2 Positiv inställning till matematik och dess användning i andra ämnen

3 God numerisk förmåga

4 God matematisk överblick

5 God undervisning i tillämpningsämnet

6 Stor uppmärksamhet åt samarbetet matematik - tillämpningsämne

7 Riktig inställning från tillämpningsämnets sida till matematikens roll

Matematiklärarna

I enkäten beklagar flera av lärarna att de inte bättre känner vilket matematikbehovet är i den fortsatta M-utbildningen och under ingenjörernas yrkesverksamhet. De förklarar sig dock ha en god allmänuppfattning om matematikbehovet. De ställer sig positiva till att utommatematiska tillämpningar tas upp under deras matematikundervisning men pekar på svårigheterna. Se vidare sammanfattningen av konferensen "M och matematiken" på sid 197.

De yrkesverksamma

I enkätsvaren framförs en viss kritik mot högskolans matematikundervisning för att "den inte var upplagd tillräckligt mycket på att tjäna de andra ämnenas behov" och att "jag fick inte lära mig tillräckligt att tillämpa matematik på högskolan". Det var 37 % respektive 43 % som höll med om dessa uttalanden. Man angav "att kunna lösa tillämpningsproblem med matematik" som ett viktigt mål inom ingenjörsutbildningen. På sid 26 - 28 i "Sju enkäter" citeras en rad öppna svar som ingenjörerna gav. De handlar om problemet att tillämpa matematik. De ger en suggestiv bild av att detta är ett viktigt område och att mer träning vore önskvärd under högskoletiden.

Sammanfattande analys

I avsnitt 1.2.1 diskuterar jag allmänt svårigheter som möter när man ska lära sig tillämpa matematik. Se sid 67. I mina intervjuer och enkäter har dessa svårigheter kommit till klart uttryck. De viktigaste intrycken sammanfattas nedan.

- Inom den rena matematikundervisningen (algebra och geometri, differential- och integralkalkyl) arbetas det i mycket liten ututsträckning med att tillämpa matematik. Någon gång presenteras ett matematiskt område med utgångspunkt i en praktisk situation och något oftare ges tekniskt-praktiska tillämpningsexempel sedan ett matematikområde arbetats igenom.

- Något klart målinriktat arbete på att i övriga ämnen lära eleverna att angripa en situation matematiskt förekommer knappast. När matematik används så sker det på ett självklart och omedvetet sätt. Tekniska problem presenteras - ofta i numerisk form - och en teknisk teori byggs upp. I denna teori används matematik i olika former. Beräkningar utförs och resultat presenteras i numerisk form. På detta sätt blandas matematik och teknik.

- Matematik används i mycket stor utsträckning i de tekniska ämnena och teknologerna stärker successivt sin matematiska förmåga och ökar sin färdighet men bygger egentligen aldrig några egna modeller. De lär sig använda matematik men inte att tillämpa den. Det blir därmed snarare fråga om ett skruvinlärande än ett spikinlärande (se sid 38): eleverna vänjer sig vid att använda matematiska begrepp och metoder.

- Att teknologerna ska lära sig tillämpa matematik har - medvetet eller omedvetet - inte prioriterats särskilt högt. Uppenbarligen är båda parter - matematiker och tillämpare - nöjda med den roll matematikundervisningen i dag fyller, nämligen att ge grundläggande inommatematisk träning. Det är sedan tillämpningsämnena som tar vid och tränar teknologerna att använda matematiken. I kontrast till denna förnöjelse står många yrkesverksamma och många teknologer som önskar mer träning i att tillämpa matematik.

- En allvarlig defekt uppfattar jag vara att många ämnen inte utnyttjar den matematik som många teknologer lärt sig. Det beror vanligtvis på att lärarna i dessa ämnen möter ett starkt motstånd från stora teknologgrupper när de ställer mer omfattande matematikkrav. Detta motstånd och dåliga resultat när sådana försök genomförs gör att lärarna lätt ger upp och sänker kraven. Då lär sig inga teknologer att tillämpa sin matematik, vilket leder till en ond cirkel med en slutlig önskan om nedskärning av matematikkurserna.

2.3.3 ÄR MATEMATIKUNDERVISNINGEN FÖR TEORETISK?

Matematikundervisningen beskylls ofta för att vara för teoretisk, för stringent och för logisk. Man diskuterar ofta denna fråga på en teknisk högskola och det förefaller att gå en klar skiljelinje mellan matematiker och tillämpare. De senare anser ofta att matematiken är för teoretiskt upplagd och inte inriktad i tillräckligt hög grad på att "serva" tillämpningsämnena. Matematikerna försvarar en "teoretisk" uppläggning.

I avsnitt 1.2.3 har jag diskuterat vad som kan anses kännetecknа en teoretisk, stringent matematikundervisning och dess motsats. Med detta som bakgrund ska jag analysera situationen på M-KTH.

Ämnesföreträdarna

Som framgått av "Sju enkäter" är man i princip nöjd med matematikundervisningens utformning och därmed också med abstraktionsnivån. Det existerar dock vissa dissonanser i uppfattningen. Sålunda tycker man att större ansträngning bör läggas ned på att stärka teknologernas räknefärdighet. Man är nog beredd att ge visst avkall på de teoretiska delarna om det kunde hjälpa. Då och då hör man ämnesföreträdare nämna delar av matematikkursen som man tycker är onödiga: "Varför ska man behöva syssla med seriers konvergens? I praktiken tar man ju bara med ett par termer och ser hur de uppför sig." "ε-δ-tekniken har jag aldrig haft användning av." "Diskussioner om kontinuitet och deriverbarhet behövs väl inte. I praktiken är alla funktioner kontinuerliga."

"n-dimensionella rum är matematikernas påhitt, för tillämpare räcker det med 3 dimensioner." Osv. I de intervjuer jag genomfört har strödd kritik av detta slag hörts men inget genomgående misstroende. Detta kan naturligtvis bero på en sorts "gentlemen's agreement" som är vanligt mellan företrädare för olika universitetsinstitutioner: "Om jag låter dig vara ifred så låter du mig vara ifred." Jämsides med denna inställning finns naturligtvis också en respekt för kollegerna bland matematiklärarna och den insats de gör. Östergren har diskuterat dessa frågor. Se UHÄ-rapport 1977:1.

I djupet av sitt hjärta förefaller många ämnesföreträdare hoppas på en matematikundervisning som

- inte tar för mycket tid
- inte är för teoretisk eller omfattande
- ger goda kunskaper och goda färdigheter inom ett relativt begränsat "kärnområde", som är gymnasiekursen och litet till
- visar hur matematik tillämpas.

I MATEK:s rapport (1973) finns sådana förhoppningar diskuterade och påvisade som orealistiska. Se vidare sid 167.

Matematiklärarna

Ansvaret för hur teoretisk matematikundervisningen är vilar på matematiklärarna. Enligt vad som framgår av "Sju enkäter", "M och matematiken", MATEK-rapporten, intervjuer och samtal samt personlig kännedom är matematiklärarnas inställning ganska balanserad. I den analys som jag gjort i avsnittet 1.2.3 om teoretisk och praktisk matematikundervisning förefaller de att ligga relativt nära det jag kallat "kompromiss". Undervisningen visar inga teori-excesser och är pragmatisk till sin uppläggning: "Vi ska hjälpa teknologerna att klara tentamina." (Dessa tentamina är inte särskilt teoretiskt lagda.) Det finns ibland tendenser till att vissa matematiklärare lägger upp sin undervisning mera teoretiskt. De sätter en ära i att bedriva sin undervisning principiellt. De förefaller ta chansen när de erbjuds att syssla med något ovärldsligt, i sig själv förverkligande som matematik ibland kan vara. Detta är emellertid undantag.

Matematikerna får dock anses försvara en teoretisk matematikundervisning och som vi tidigare sett är det knappast några tillämpningar som behandlas. Abstraktionsnivån uppges dock ha sänkts under det senaste årtiondet. En av anledningarna härtill är att det börjat studera så många teknologer med dåliga studieförutsättningar för abstrakt matematikundervisning.

Teknologerna

Enligt enkäten har man inga större invändningar mot matematikundervisningens abstraktionsnivå. I de öppna svaren (se sid 80 - 81 i "Sju enkäter") höjs dock röster mot teorins omfattning. Detsamma gäller i än högre grad vid de intervjuer jag gjorde. Majoriteten

av de intervjuade tycker att matematikundervisningen är för teoretisk och att bevis spelar för stor roll. Åtminstone gäller detta själva undervisningen, erkannerligen då föreläsningar där teorin förekommer. Många teknologer har en egen metod att reducera teoriomfånget: de hoppar över föreläsningar. Sedan lektionsundervisning införts har av allt att döma de teoretiska delarna reducerats något; det som kvarstår lärs dock in mer effektivt, dels genom den bättre närvaron dels genom den närmare sammankoppling som sker med övningsräknandet, något som är en naturlig följd av lektionsformen.

Majoriteten av de intervjuade tog klart avstånd från den särskilda teoritentamen som finns. De ansåg att den vanligtvis klarades genom utantillärande och att den därigenom förfelade sitt syfte. Det ska dock nämnas att två av de intervjuade tyckte att teoritentamen var bra och att inlärningsarbetet varit givande och givit ökad klarhet i förståelsen för matematiken.

De yrkesverksamma

Enligt enkäten är majoriteten av de yrkesverksamma nöjda med sin matematikundervisning (65 %), tycker inte matematiken var onödigt svår (84 %) och anser sig ha haft nytta av det mesta de fick lära sig i matematik (38 %). I de öppna svaren finns många som försvarar en fristående, principiell matematikundervisning. Några få klagar över att matematiken varit för teoretisk.

Särskilt slående i enkäten är det starka försvar för logiken som finns. Av de områden som uppräknades som önskvärda vid högre teknisk M-utbildning var det "att genomföra logiska resonemang" som fick den största svarsandelen (60 %). Det förefaller också som om man anser att det främst är matematiken som bör ha ansvaret för denna logiska träning. Matematiken är ju i sig logiskt uppbyggd. Problemen i matematik är ovanligt rena, med lite "brus" från en komplicerad omvärld. Denna begränsning gör logikträning särskilt verkningsfull just i matematik. Det man eftersträvar är inte en formell logik utan träning i att genomföra logiska resonemang intuitivt men korrekt.

Sammanfattande analys

Det finns en vitt spridd uppslutning kring matematikundervisningen som den bedrivits vid de tekniska högskolorna under de senaste decennierna. Den har hävdat matematiken som ett eget ämne och givit de färdiga ingenjörerna en god matematisk självkänsla. De har tyckt om ämnet och anser sig ha fått en god utbildning i det. Det har hjälpt dem att genomföra logiska resonemang och de vet vad en matematisk teoribyggnad är. Denna matematiska kompetens har varit en tillgång i yrkeslivet. De hade förmodligen inte känt sig ha denna kompetens om matematikundervisningen varit lösligare och mer direkt nyttoinriktad.

Enligt vad som redovisats ovan finns det en icke försumbar minoritet som anser matematikundervisningen för teoretisk och som skulle önska ändra uppläggningen. En matematikutbildning som ska kunna utnyttjas i en mångfald olika omständigheter blir emellertid av naturliga skäl ganska teoretisk. Gör man utbildningen mindre teoretisk eller t o m integrerar den i andra ämnen mister den lätt sin generella användbarhet. Man bör vara medveten om dessa förhållanden vid den fortsatta debatten kring "den teoretiska matematiken".

2.3.4 UPPGIFTSLÖSANDET I MATEMATIK

Både undervisningen och examinationen i matematik i den högre tekniska utbildningen domineras av uppgiftslösande. Jag ska närmare skärskåda detta. Som en bakgrund hänvisar jag till avsnitt 1.2.2 på sid 69 där uppgiftslösandet diskuteras allmänt.

Ämnesföreträdarna

I intervjuer och samtal har inte framkommit någon mer omfattande kritik mot uppgiftslösandet inom matematiken. Tvärtom har man ju varit tveksam mot en stark teoretisering och t o m önskat att matematiken behandlat tillämpningsuppgifter på övningar och lektioner. En brist på samordning problemlösning - teori har dock påtalats liksom att matematikens uppgiftslösande varit för isolerat så att eleverna stått handfallna när de stött på liknande uppgifter i tillämpningsämnena. Redan att beteckningarna varit annorlunda har hindrat teknologerna. Det måste tolkas så att teknologerna inte lyckats generalisera sina erfarenheter från matematik i önskvärd utsträckning.

Ämnesföreträdarnas matematikbehov avsåg främst goda kunskaper i gymnasiekursen. I allmänhet nöjde man sig med de enklare delarna av KTH-kursen. Enligt min hypotes om att de som knappt godkänts på KTH-matematiken därmed visat att de behärskar skolmatematiken skulle de nuvarande tentamenskraven i matematik vara väl avvägda. De kräver det minimum tillämpningsämnena behöver.

Matematiklärarna

Matematiklärarna förefaller nöjda med såväl uppgiftslösandets omfattning som tentamina. Teoritentamens utformning är dock vissa tveksamma inför och en alternativ form har prövats med teorifrågor på kontrollskrivningar. En matematiklärare önskar begränsa uppgiftslösandet till kursens kärna. Lärarna förefaller medvetna om att de krav som ställs inte är särskilt höga. En matematiklärare på M-CTH sammanfattade sin syn en gång: "När vi har godkänt en teknolog med en trea i matematik har vi därmed inte gjort annat än utfärdat en garanti för att han/hon kan gymnasiekursen."

Teknologerna

I de öppna svaren i enkäten framfördes ibland önskemål om mer problemlösningsträning i stället för teori. När teknologerna fick ange hurudan förmåga de tillägnat sig i olika hänseenden låg problemlösningsförmåga högst - dock ej bland teknologer med låga matematikbetyg från gymnasieskolan.

I intervjuerna framfördes inga erinringar mot uppgiftslösning som den dominerande studieformen. Tentamina ansågs svara bra mot ämnets mål. En betydelsefull information var att man var helt ense om att det inte finns några genvägar till tentamen, dvs man kan inte klara sig genom att bara studera vissa delar av kursen eller läsa in ett litet antal typuppgifter. De flesta av de intervjuade erkände att de läst matematik med sikte på att klara tentamen men man tyckte inte att detta var någon direkt nackdel. Någon hade velat ha ett mer kunskapsinriktat mål för sitt arbete.

De yrkesverksamma

De yrkesverksamma ser mer kunskapsorienterat på matematikstudiet än teknologerna förefaller göra. I yrkeslivet visar sig inte matematikbehovet som små övningar att göra. Detta avspeglar sig i att "lösa matematiska problem", "utföra numeriska och algebraiska beräkningar" samt "kunna en rad matematiska metoder" anges som inte särskilt viktigt vid högre M-utbildning. Trots detta framförs inga större invändningar mot matematikundervisningens uppläggning.

Sammanfattande analys

Matematikundervisning och examination domineras av uppgiftslösande. Det är uppenbarligen en effektiv undervisningsform som kommit att accepteras av alla parter. Alla har dock knappast gjort klart för sig vilka av matematikundervisningens delmål som premieras genom en sådan uppläggning. Jag vill påstå att det är räknefärdighet, elementär begreppsförståelse (ej kvalificerad) samt metodkännedom. Det är mer tveksamt om problemlösningsförmågan ingår, eftersom uppgifterna i allmänhet är mycket standardbetonade och sällan ställer större krav på kreativitet och fantasi. "Öppna problem" behandlas knappast alls.

Även om man måste konstatera att matematikundervisningen har funnit en roll och uppfyller den väl kan man fråga sig om den inte är för isolerad och väl torftig.

2.3.5 ÄR MATEMATIKEN FÖR SVÅR?

Matematik har haft ett rykte om sig att vara ett svårt ämne, som fordrar särskild fallenhet. Samtidigt har de som haft denna fallenhet kunnat lära sig mycket på kort tid. I detta avsnitt ska jag diskutera hur svår matematiken uppfattas vid den högre tekniska utbildningen exemplifierad av M-KTH. Jag inleder med att referera en del rapporter och återkommer sedan till "Sju enkäter".

Dåliga studieresultat vid M-KTH

I slutet av 1960-talet och i början av 1970-talet försämrades studieresultaten vid teknisk fakultet. På många utbildningslinjer sjönk antalet examinerade på ett alarmerande sätt. Särskilt var studieresultaten dåliga i lägre årskurser.

Ta t ex inskrivningsomgången hösten 1972 vid M-KTH. Det fanns då 235 utbildningsplatser men antalet inskrivna var endast 215. Antagningspoängen (betygsmedelvärdet) från gymnasiet hade undre kvartilen 3,00, medianen 3,39 och övre kvartilen 3,67. Vårterminen 1973 kvarstod 74 % av de inskrivna. Andelen klarade tentamina under första läsåret var i medeltal 43 %. Det s k prestationsutfallet, som är kvoten mellan antalet avklarade sluttentamina av årskullens teknologer och det möjliga antalet sluttentamina, var första året 40 - 50 %. I några av de viktigaste ämnena de första åren var andelen godkända efter de första tentamenstillfällena:

Algebra och geometri	43 %
Matematik del 1	37 %
" " 2	43 %
Mekanik del 1	64 %
" " 2	64 %
Fysik del 1	16 %
" " 2	18 %
" " 3	24 %
Hållfasthetslära del 1	34 %

Fram t o m augusti 1977 hade 22 % av de ursprungligen inskrivna examinerats. Man kan förstå att resultaten väckte bekymmer.

MATEK

De dåliga studieresultaten vid de tekniska högskolorna ledde till att UKÄ 1972 tillsatte en kommitté, MATEK (1973), för att utreda den grundläggande utbildningen i matematik. I sin rapport skrev MATEK bl a att

- ett fortsatt behov av matematikutbildning för ingenjörer kommer att föreligga; vissa av dem behöver avancerade matematiska kunskaper
- omfattningen av matematiken bör definieras av behoven i tillämpningsämnena
- många teknologer har svårigheter att klara sig, bl a beroende på dåliga förkunskaper
- stora ansträngningar nedlagts inom de tekniska högskolorna för att anpassa utbildningen till det försämrade elevunderlaget
- fordringarna i matematik, bl a vid matematikinstitutionerna, har sannolikt minskats under senare år
- klyftan är för stor mellan nuvarande krav för en civilingenjörsexamen och studieförutsättningarna hos en betydande del av dagens teknologer

- o det inte enbart genom att omorganisera matematikundervisningen kan uppnås avgörande förbättringar; därtill krävs övergripande åtgärder såsom att på linjerna införa parallella studiegångar med olika matematikkrav ledande till olika specialiseringar

- o man genom resurstillskott till matematikundervisningen skulle kunna uppnå väsentliga marginella förbättringar; förslag till åtgärder gavs

- o matematikundervisningen i gymnasieskolan borde förstärkas

- o antagningsbestämmelserna för teknisk fakultet borde ändras; informationen till presumtiva sökande borde intensifieras

- o pedagogiskt utvecklingsprojekt avseende matematikundervisningen borde prioriteras.

MATEK:s arbete förorsakade en schism, vilken bl a orsakades av en varierande optimism hos kommitténs ledamöter, experter och ansvariga inom UKÄ om möjligheterna att förbättra situationen via en ändrad matematikundervisning. Denna schism föranledde ordförandebyte och en enkel fråga i riksdagen.

MATEK:s kärva rapport var enligt min mening en realistisk bedömning av situationen. Det var glädjande att se att man kunde enas, trots att kommittén bestod av både matematiker och företrädare för tillämpningsämnena. Möjligen kan denna enighet förklaras av frånvaron av utbildningspolitiker i kommittén.

RESULTATGRUPPEN

UKÄ tillsatte 1973 en ny grupp, RESULTATGRUPPEN (1974), med uppgift att ge förslag till åtgärder för att komma till rätta med de dåliga studieresultaten. RESULTATGRUPPEN ansåg bl a att

- o studieeffektiviteten inom den högre tekniska utbildningen i allmänhet var otillräcklig framför allt beroende på svårigheterna för teknologerna att klara första årskursen: "Anledningen härtill tycks bl a vara att utbildningen inte är så pedagogiskt och innehållsmässigt flexibel att den helt kunnat anpassas till de förkunskapsmässiga och heterogena nybörjarkullar man under senare år fått, dels som en följd av utbyggnaden av de tekniska fakulteterna dels som en följd av förändrad målsättning och struktur för gymnasiet."

- o MATEK i huvudsak hade rätt

- o studiemedelstilldelningens roll som spärrinstrument var tveksam och borde omprövas.

RESULTATGRUPPEN föreslog bl a att

- o kortare (tvååriga) utbildningsalternativ borde inrättas vid teknisk fakultet

- o en ökad differentiering av utbildningen i grundläggande ämnen, främst matematik, borde ske

- en rad pedagogiska och organisatoriska åtgärder borde äga rum för att förbättra studieeffektiviteten (lektionsundervisning, små grupper, stoffintegration, långsam studiegång, förstärkt utbildningsledning på linjerna, pedagogisk lärarutbildning och förstärkt studievägledning)

- informationen borde ökas i skolan om teknisk utbildning.

RESULTATGRUPPEN var mer allsidigt sammansatt än MATEK och de utbildningspolitiska och taktiska aspekterna kom att spela större roll. Gruppens förslag om tvååriga utbildningslinjer och ökad differentiering ledde inte till omedelbara åtgärder och ännu 1978 hade föga hänt. Däremot fick teknisk fakultet resurstillskott för att vidta stödåtgärder för att förbättra studieeffektiviteten och ett omfattande stödprogram i gruppens anda sattes in 1973 - 1977.

RESULTATGRUPPEN lät genomföra en mindre undersökning om matematikens betydelse för övriga ämnen. Den bestod huvudsakligen i korrelationsberäkningar. Man fann medelhöga korrelationer (0,3 - 0,5) mellan gymnasiebetyg i matematik och fysik och teknologernas prestationer under de första högskoleåren. Samma korrelationer har erhållits vid andra liknande undersökningar. De teknologer som lyckades dåligt i de matematiska ämnena på högskolan hade genomgående dåliga resultat även i övriga ämnen. Däremot fanns det teknologer med goda matematiska resultat men med dåliga resultat i andra ämnen. RESULTATGRUPPEN fann inget stöd om man velat utpeka matematikundervisningen som boven i dramat.

Studieavbrottsundersökningen

RESULTATGRUPPEN initierade en studeavbrottsundersökning (Håstad, Högberg, Johansson, 1974, 1975, 1977). Dess uppgift var att kartlägga omfattningen av studieavbrotten och dess orsaker. En hel del data om matematikundervisning har kommit fram genom undersökningen. Den avser antagna 1963, 1967 och 1971 till landets samtliga tekniska högskolor.

- Många teknologer (40 - 50 %) säger att de "ansträngt sig ganska litet eller väldigt litet" i gymnasiet.

- Cirka 10 % bedömde sin förmåga i räkning som dålig när de började högskolan. Bland studieavbrotten var motsvarande andel cirka 30 %. Sitt intresse för räkning bedömde 15 % som dåligt, bland studieavbrotten 25 %.

- Cirka 20 % bedömde sina förkunskaper från gymnasiet som otillräckliga. Denna andel har ökat med åren från 3 % bland antagna 1963 till 34 % bland antagna 1971. Bland studieavbrotten var motsvarande andel 40 - 60 %.

- Cirka 20 % var missnöjda med övningarna och 62 % med föreläsningarna.

- Andelen som gör studieavbrott bedöms enligt undersökningen öka från 15 % bland antagna 1963 till 30 % bland antagna 1971. Andelen som avlägger examen på normaltid bedöms minska från 65 % 1963 till 35 % 1971.

- Cirka 30 % av de antagna 1971 hade gymnasiebetygen 2 - 3 i matematik, fysik och kemi. Bland studieavbrotten var denna andel ungefär dubbelt så stor som bland normaltidsexaminerade.

- Informationen före studierna om kursinnehåll bedömdes som tillräcklig av endast 34 % och informationen under studietiden om en ingenjörs arbetsuppgifter bedömdes som tillräcklig av 44 %.

- Huvudskälet till studieavbrott var

  studieskäl 62 % (därav "studierna erbjöd för stora svårigheter" 35 %, "tyckte inte om ämnena" 17 %)

  ändrade studieplaner 28 %

  yttre orsaker 11 %

- På frågan till studieavbrytarna vilket ämne som var svårast svarade 59 % matematik och 26 % mekanik, 19 % fysik samt 36 % annat eller inget ämne. Fler än ett ämne kunde anges. 62 % ansåg att svårigheterna i dessa ämnen var en av anledningarna till att de slutat.

Förutom dessa hårddata finns i rapporterna citerade ett stort antal omdömen om högre tekniska studier och förslag till hur svårigheterna kan reduceras. Dessa citat har utgjort ett viktigt bakgrundsmaterial också till slutsatserna i min rapport.

Stödåtgärder på KTH från och med 1973

På grund av de dåliga studieresultaten i början av 70-talet satsade högskolan extra resurser på de fyra värst drabbade utbildningslinjerna, däribland M. Satsningen innebar för läsåret 1973/74 ett resurstillskott av cirka 20 % i första årskursen, varvid antalet godkända tentamina ökade med cirka 30 %. Vissa av åtgärderna har påverkat matematikundervisningen.

- Föreläsningar och övningar i matematik ersattes med lektionsundervisning. Den schemabundna undervisningstiden i en-variabelkursen i matematik ökade från 119 h till 154 h, dvs med 29 %.

- Fast gruppindelning genomfördes. Varje grupp hade en M-lärare som klassföreståndare.

Bland andra åtgärder som samtidigt infördes kan nämnas inrättande av tjänst som studierektor på linjen, förstärkt studievägledning och stödundervisning. Enligt företagna enkäter var teknologerna mycket positiva till lektionsundervisningen och matematiklärarnas insatser. Närvaron var god. Skolbetygen spelade stor roll för hur man klarade sig även sedan stödåtgärderna införts: Medelandelen klarade tentamina var 87 % bland dem med betygssumman 14 - 15 i matematik, fysik och kemi. De med betygssumman 6 - 8 i dessa ämnen klarade 32 % av tentamina.

Teknologernas arbetsinsats

I en enkät (Dandenell, 1976) tillfrågades bl a teknologer i första årskursen på M-KTH hur mycket tid de ägnade åt studierna jämfört med sina kamrater. Det förvånande var att bara 16 % trodde att de ägnade mer tid än kamraterna medan hela 40 % trodde att de ägnade mindre tid än kamraterna. En annan fråga avsåg vilka skäl som har inverkat på missnöjet med studieprestationen. Olika skäl anfördes. Vanligast var "studieleda och bristande ansträngning" (27 %), "bristande förkunskaper" (22 %) och "dålig undervisning" (21 %). Långt ned kom "bristande anlagsmässiga förutsättningar" (8 %).

Sammantaget måste svaren på dessa båda enkätfrågor tolkas så att teknologerna inte tror att det är egen förmåga som fallerar. I stället är det arbetsinsatsen som varit för liten både på högskolan och i gymnasiet. Dessutom kan man skymta en viss kritik mot utbildningssystemet, som ställer för stora krav på individens arbetsinsats.

Matematikproblem vid filosofisk fakultet

Från 70-talets början föreligger vissa data som avser ett 70-tal matematikstuderande vid filosofisk fakultet läsåret 1972/73. Parallellt med diskussionen om teknologernas studiesvårigheter kan det vara intressant att se hur deras jämnåriga "matematikkolleger" vid en annan fakultet såg på sin situation. De tillfrågades om vad de tyckte var särskilt besvärligt i samband med studierna. Av de svarande anförde 58 % dåliga förkunskaper. Därnäst kom svårighet att planera studieinsatsen (34 %), för omfångsrika kurser (21 %), för teoretiska kurser (21 %) samt svårighet att se anknytning till verkligheten (21 %). På frågan om förbättringar angav 54 % "byta ut föreläsningar mot gruppövningar o dyl". Studiemisslyckanden trodde de främst orsakades av otillräckliga förkunskaper hos de studerande (63 %), bristande studiemotivation (45 %) samt privata svårigheter (34 %).

Ämnesföreträdarna

Jag återvänder nu till vad som framkommit vid intervjuer och enkäter inom mitt projekt.

Ämnesföreträdarnas syn har framkommit dels genom enkäten och intervjuerna med lärarna vid M-KTH dels genom rapporterna från MATEK och RESULTATGRUPPEN.

Ämnesföreträdarna är bekymrade över de försämrade studieresultaten. Man motiverar dem med den breddade intagningen, de försämrade förkunskaperna och ingenjörsyrkets minskade attraktivitet. Ingen förebråelse riktas mot lärarna i matematik och andra grundläggande ämnen, som ju är de ämnen där försämringarna märkts mest. Man ställer sig bakom den utsträckning i vilken man från dessa ämnen försökt upprätthålla kraven. Den svåra uppgift dessa ämnen har att från en lägre förkunskapsnivå föra upp teknologerna till en sådan nivå att de kan klara de tillämpade ämnena har man stor förståelse för. Ämnesföreträdarna säger sig själva ha konstaterat att många teknologer har stora svårigheter för de mer intellektuellt krävande delarna av deras ämne.

Ämnesföreträdarna har i olika beslut om resurstilldelningar och liknande stött den omfördelning av resurser som skett till förmån för lägre årskurser. Man har menat att klara förbättringar kan åstadkommas med ökade resurser men att de är marginella. Samtidigt har man riktat krav till högre myndigheter om mer övergripande åtgärder: reform av gymnasieskolan, införande av nya utbildningsalternativ, en ändrad grundsyn osv. Först sådana åtgärder anses kunna "lösa problemen och höja studieeffektiviteten".

Ett sätt att göra matematiken mindre svår vore att ställa mindre krav på matematik i de tekniska ämnena. Enligt "Sju enkäter" anser de sig dock ha låga krav redan nu och kan inte reducera dem ytterligare utan att förändra målet för utbildningen. Med en nominell studietid på fyra år och med nuvarande förkunskapsnivå hos de antagna behövs en matematik ungefär så svår som den nuvarande.

Teknologerna

I enkäten redovisad i "Sju enkäter" tillfrågades teknologerna om vad som vållade svårigheter när de skulle tillämpa matematik. Av deras svar framgår att många haft substantiella svårigheter. Mest skyller de på att de glömt, men bakom det döljer sig vanligtvis att man inte lärt sig matematiken tillräckligt för att ha den aktuell. Många tycker att lärare och böcker är oklara men detta är vanliga klagomål från sådana med dåliga förkunskaper (och dålig förmåga). Sådana klagomål kan naturligtvis också orsakas av att lärare och läroboksförfattare bedömt nivån hos de studerande på ett felaktigt sätt. Kanske kunde en annan uppläggning minska svårigheterna. Därnäst kommer att teknologerna anser sig ha svårt "att veta vilken matematik som ska användas", "att veta vilka ekvationer som ska ställas upp" och "att skaffa sig överblick". Sådana svårigheter avhjälps bäst genom att man lär sig mer matematik. Sällan anfördes mer udda skäl som att matematiken är för abstrakt, att det är mycket symboler, att matematik används till övermått, att matematik är tråkigt osv. Om teknologerna i högre grad haft sådana skäl hade man kunnat hysa tveksamhet om matematikens värde. Nu får man i stället den motsatta uppfattningen: matematik är ett viktigt ämne och därför accepterar man att det är svårt.

Matematiklärarna

Enligt "Sju enkäter" anser matematiklärarna att anledningen till teknologernas svårigheter främst är bristande förkunskaper. Någon lärare anger också "bristande fallenhet för ämnet". Man har ett intryck av att den sistnämnda synpunkten delas av fler lärare fast det inte sägs rakt ut. Det är för övrigt en diffus skillnad mellan "förkunskaper" och "förmåga". Har man bristande förmåga har ofta inte förmågan heller räckt till under den föregående utbildningen, vilket har lett till bristande förkunskaper. "Förkunskaper" avser något faktiskt medan förmåga avser något potentiellt som är svårare att uttala sig om. Det är också lättare för självaktningen hos en individ att skylla på bristande förkunskaper än oförmåga. Allt detta leder till att man kommit att använda begreppet förkunskaper i stället för det värdeladdade förmåga.

Matematiklärarna upplever sig stå inför en svår uppgift. De märker att många teknologer har stora svårigheter med ämnet. Rent mänskligt skulle lärarna i detta läge sänka tentamenskraven. De är emellertid

utsatta för påtryckningar från lärarna i ämnen som utnyttjar matematik. De önskar få mottaga teknologer med goda kunskaper och goda färdigheter i matematik. Matematiklärarna utsätts för kritik när teknologerna visar brister i matematik. Detta talar emot sänkta krav i matematiktentamina. Enligt MATEK (1973) har dock komplexiteten minskats i matematiktentamina och det har därigenom blivit lättare att klara sig. Räkningarna har gjorts mindre krångliga. De svårare och mer teorikrävande uppgifterna i slutet av tentamensskrivningarna torde dock ha bibehållit sin svårighetsgrad. Enligt vissa matematikföreträdare har kraven i matematik blivit så låga att det enda som kan garanteras är att knappt godkända teknologer "kan gymnasiekursen".

Sammanfattande analys

Det går inte att entydigt besvara frågan om matematiken inom den grundläggande tekniska utbildningen är för svår eller ej. Därtill är frågeställningen för generell och de tänkbara kriterierna för diffusa. Jag ska anföra några skäl för att den är för svår och några skäl emot.

- Matematiken är för svår om man tar hänsyn till många teknologers dåliga studieresultat.

  De data som anförts i det tidigare ger klara belägg för att studieresultaten i matematik och andra grundläggande ämnen är dåliga för många teknologer. Enligt studieavbrottsundersökningen beror detta i majoriteten av fallen på att ämnena upplevs som för svåra.

- Matematiken är för lätt om teknologerna ska kunna tillämpa matematik efter att ha läst den.

  Genom matematikundervisningen lär sig teknologerna i dag inte att tillämpa matematik. Skulle matematikundervisningen också påta sig detta ansvar skulle den behöva vara mycket mer omfattande och därmed svårare.

- Matematiken är för svår med hänsyn till den tid den har till förfogande.

  Jämförande undersökningar har visat att om tiden förlängs blir resultaten bättre. Enligt studieavbrottsundersökningen klagar många på den höga studietakten.

- Matematiken är för lätt om man ska vara säker på att teknologerna har de matematikkunskaper som fordras i andra ämnen.

  Ämnesföreträdarna i dessa ämnen uttalar ofta missnöje med teknologernas matematikförmåga.

- Matematiken är för svår med hänsyn till kraven i den fortsatta utbildningen i specialiseringar som har små matematikkrav.

På många linjer finns specialiseringar, t ex M, som inte kräver så mycket matematik. Det har många gånger föreslagits att man skulle specialsy matematikkurser för dem, dvs differentiera matematikutbildningen från början.

o Matematiken är för lätt för att den ska anses som en självständig utbildningen i matematik.

Detta gäller dock bara vissa utbildningslinjer.

På detta sätt kan man fortsätta och ange skäl för att matematiken är för svår eller för lätt.

Det finns åtminstone tre skäl för att man från högskolans sida önskar en krävande matematikkurs.

1 Med goda matematikkunskaper hos teknologerna kan de övriga ämnena ges en kvalificerad framställning.

I mina samtal med lärare i tekniska ämnen har det ofta framhållits att omfattningen av matematikkursen i hög grad avgör den nivå som resten av utbildningen kan läggas på. Just skillnaden i matematikutbildning skulle främst särskilja högskoleutbildningen från den tekniska gymnasieutbildningen. Teorin i de tekniska ämnena kan presenteras mer översiktligt och klart om den utnyttjar en kvalificerad matematisk begreppsapparat. Den kan också komma åt mer komplicerade sammanhang.

2 Teknologerna får tidigt vänja sig vid att studera intensivt.

Högskolan är angelägen om goda utbildningsresultat så att teknologerna lär sig mycket under de fyra år som är anslagna. Det är då viktigt att teknologerna kommer i gång från början och matematik är på de flesta linjer det största ämnet under det första året. Genom en intensiv undervisning i det ämnet och med återkommande kontrollskrivningar och tentamina ger man teknologerna väldefinierade mål att arbeta fram emot inom ämnesområdet som de väl känner från gymnasieskolan.

3 Matematik kan vara ett bra ämne för teknologerna att testa sin förmåga i.

Matematik har i olika utbildningar haft rollen av sållningsinstrument. En anledning var att den ofta kommit tidigt i utbildningen och i allmänhet varit krävande. Det fanns också föreställningar om att just matematik testade en persons intellektuella kapacitet och lämplighet för fortsatta studier. Nackdelen med att det fanns elever som i onödan stoppades genom en svår matematikkurs och som kanske skulle kunna klara resten av utbildningen brydde man sig mindre om. Det var ju en defekt som inte märktes. Nu ser man på ett helt annat sätt på detta.

I dagens skola är det inte aktuellt att tala om sållningsinstrument. Högskolan ser situationen i hög grad från den studerandes utgångspunkt. Men även med ett sådant betraktelsesätt kan det vara riktigt att ha ett svårt ämne tidigt i utbildningen. Det är i dag lätt att komma in på många utbildningslinjer, dvs det krävs inte så höga betyg från gymnasieskolan. Det finns därför fler bland de antagna som inte är lämpade för eller helt enkelt inte orkar med en så krävande teoretisk utbildning som den högre tekniska utbildningen är. Det är från individens synpunkt angeläget att få kännedom om sin begränsning alternativt sin ovilja så tidigt som möjligt under utbildningstiden så att han/hon kan sadla om till en annan utbildning. Det vore värre om han/hon först sent under utbildningsgången träffade på hinder av detta slag.

En förutsättning för relevansen i ett sådant resonemang är att matematiken inte utgör ett konstlat hinder utan att man måste klara den för att ha full nytta av resten av utbildningen. Jag har mött företrädare som menar att matematiken är onödigt svår och som exempel anfört att det är många som har svårigheter i början av studierna men som med glans klarar de tekniska ämnena. Det talas också om teknologer som har matematiken kvar som en av de sista ämnena de klarar. Att de lyckats i de andra ämnena trots att de inte klarat matematiken skulle visa att man mycket väl kan vara utan matematiken. Detta resonemang haltar dock betänkligt. Alla teknologer inleder sina studier med matematik. Även om de inte klarar matematiktentamina så har de arbetat med matematik. Enligt studieavbrottsundersökningen så arbetar de flesta också ganska mycket med ämnet. De har alltså lärt sig en hel del. Paradoxalt nog kan det vara så att den som blir knappt godkänd vid sitt första tentamenstillfälle förmodligen har lärt sig mindre matematik än den som först klarar sig vid ett senare tillfälle. Det kan ju ha berott på speciella omständigheter att det gick så bra första gången. Den som inte klarar sig förrän senare har bevisligen arbetat längre tid med matematiken och goda chanser finns att han/hon lärt sig mer. Under alla omständigheter kan han/hon ha lärt sig så mycket matematik som behövs för tillämpningsämnena.

Jag skulle sammanfattningsvis vilja påstå att matematikkraven i stort är lagom. Detta påstående i en så allmän form får tas för vad det är värt. Det kan finnas enstaka utbildningslinjer för vilket det ej gäller.

Jag bygger mitt uttalande på att matematikens svårighetsgrad har debatterats mycket under senare år och nuvarande krav är resultatet av ett omfattande kompromissande. Återigen hänvisar jag till den empiriska process som lett fram till dagens krav. Kommittéerna MATEK och RESULTATGRUPPEN har behandlat frågan från principiell synpunkt men hade inga förslag till ändrad inställning. Det hörs för närvarande inga kraftiga protester från någon intressegrupp mot nuvarande krav. Däremot kan man öka förutsättningarna för teknologerna att uppfylla kraven. Man kan ge mer resurser för matematikundervisning och ge teknologerna mer tid på sig. Skruvinlärande kan därvid användas mer.

Emellertid skulle matematikkursen kunna minskas om man ändrade målet för utbildningen. Vi kanske skulle ha användning för en annan ingenjörstyp som har matematikkunskaper av annat slag, som är tillräckliga för att följa ett ämne som använder matematik men inte tillräckliga för att tillåta individen att självständigt arbeta med matematik.

3 SVENSK MATEMATIKUNDERVISNING I MORGON

Inledning

I likhet med målsättningen för denna rapport ägnar jag mig huvudsakligen åt matematikutbildningen för civilingenjörer, dvs kurserna i grundskolan, gymnasieskolans NT-linje och de tekniska högskolorna. Först tar jag upp skolans utbildning och sedan högskolans. I båda fallen inleder jag med ett parti kallat "Perspektiv", vari jag dels sammanfattar vissa delar tidigare i rapporten dels redovisar några andra källor av relevans i sammanhanget. Under rubriken "Förslag" framför jag en rad idéer om 1980-talets matematikundervisning. För skolans del gäller det ett konkret förslag till alternativ uppläggning. För teknisk högskola har jag formulerat en rad principer, som jag anser bör ligga till grund för utformningen av matematikundervisningen. De är inte heltäckande utan inskränker sig till frågor som aktualiserats genom min undersökning.

Först emellertid ett sammandrag av de allmänna frågor som jag tog upp i kapitel 1.

A Vid matematikinlärande kan man särskilja fem delmål:

Räknefärdighet

Begreppsförståelse

Metodkännedom

Problemlösningsförmåga

Tillämpningsförmåga

Dessa är inbördes beroende på så sätt att man inte kan nå tillräckligt långt avseende ett delmål utan att också tillägna sig de övriga målen. Denna "onda cirkel" är en viktig orsak till att det är så svårt att lära sig matematik.

B Man kan särskilja två huvudtyper av matematikinlärande, av mig kallade spik- och skruvinlärande. Spikinlärandet är ett mer bokligt-teoretiskt-intellektuellt inlärande medan skruvinlärandet erinrar mer om det sätt på vilket "livet lär". Att använda de båda metoderna i dess rätta proportioner är väsentligt för ett gott inlärningsresultat.

C Endast kunskaper, som man själv är säker på, är riktigt värdefulla. Man ska i så fall kunna avgöra om det svar man avgivit är rätt eller ej. Jag har kallat dem primärkunskaper. Det är egentligen endast sådana kunskaper som man har någon förutsättning att kunna tillämpa.

D Elever som blir knappt godkända vid ett prov har i allmänhet endast primärkunskaper motsvarande kursen närmast före den aktuella kursen.

E Hypoteserna under C och D leder till slutsatsen att en matematikutbildning bör eftersträva dels att eleverna får en kärna av verifierbara kunskaper dels får orienteringskunskaper. De sistnämnda tjänar bl a syftet att förankra och ge sammanhang åt kärnkunskaperna.

F Jag särskiljer två sorts kunskaper kallade brukskunskaper och initiativkunskaper. De förstnämnda är klara att använda som man lärt sig dem. De sistnämnda ger möjlighet till att ta matematiska initiativ, t ex att formulera egna problem och lösa dem. Man har behov av brukskunskaper på alla stadier. Även initiativkunskaper kan förekomma på alla stadier men är svårare att utbilda till. Bl a fordras en viljemässigt positiv inställning för att kunskaperna ska kunna utnyttjas. Det är svårt att testa om en elev har initiativkunskaper, vilket gör att eleverna - ibland ledda av lärarna - kan förfalla till helt felaktiga inlärningsmetoder som inte leder till någon användbar kunskap - men eleverna klarar testet.

G Ansenliga problem är förknippade med att öva in matematiktillämpning. Bl a fordras primärkunskaper. Vidare orsakar tidsplacering och lärartillgång svårigheter.

H Matematikundervisningen domineras i allmänhet av uppgiftslösande. Detta arbetssätt erbjuder så många väldokumenterade fördelar att det även kommer att användas framgent samtidigt som det medför en begränsning av de mål som i praktiken uppnås.

I Matematikundervisning innebär ett intrikat kompromissande mellan å ena sidan stringens, allmängiltighet och fullständighet och å andra sidan lättillgänglighet, förenkling och tillämpbarhet. Att träffa rätt och anpassa undervisningen till elevgruppens intresse, förmåga och målsättning kräver lärare med erfarenhet och stor skicklighet.

J Vissa studerande saknar förutsättningar att inse de abstrakta matematiska sammanhangen i den kurs de studerar. I den mån de lär sig något är det inte en abstrakt matematik utan någon form av konkret motsvarighet. Sådana studerande har små möjligheter att klara ytterligare matematikkurser.

K Hur mycket tid som läggs ned på matematikinlärandet har ett avgörande inflytande på kunskapsresultaten.

L En viktig roll för resultaten spelar också den nivå undervisningen bedrivs på. I en klass utgör eleverna, vars matematikförmåga ligger i tionde till tjugofemte percentilen nerifrån räknat, en betydelsefull styrgrupp.

3.1 Skolan

3.1.1 PERSPEKTIV

En matematikers perspektiv

1968 gav Lennart Carleson, professor i matematik, ut boken "Matematik för vår tid". Den utgjorde ett mycket uppmärksammat inlägg i debatten. Det är av stort intresse att i detta sammanhang kortfattat redogöra för Carlesons inställning. Den är förmodligen representativ för matematikerna och har bibehållit det mesta av sin aktualitet trots att det är ett decennium sedan boken skrevs.

Carleson försvarar helt naturligt matematiken som vetenskap och beklagar att matematikerna inte lyckats skapa större förtroende för sitt ämne. Han säger bl a:

> "Har man inte därmed gjort allt som kan göras? I själva verket tror jag att 'the new math' gjort problemet större. Man har lagt tyngdpunkten på den moderna matematikens formalism och noggranna definitioner och inte på dess idéer och resultat. Det är oundvikligt att detta är tråkigt och ointressant och ger en vrångbild av dagens matematik. I Sverige har man speciellt tagit upp 'mängdlära' i kurserna och detta har på många håll missförståtts. Det rör sig inte om någon teori utan om vanligt sunt förnuft, lika enkelt eller kanske enklare än 1 + 1 = 2. Mängdläran kan emellertid göras svår genom invecklad terminologi och många symboler, och detta förefaller i många framställningar vara huvudsaken."

Carleson kommer därvid in på sin kraftigaste invändning mot reformen av skolmatematiken i Sverige nämligen att den nya matematiken blivit för formalistisk. Man har "överbetonat de formella sidorna av matematiken på bekostnad av det egentliga idéinnehållet". Han anser vidare att "den tekniska sidan starkt undervärderats av företrädarna för den nya matematiken". Han tänker då främst på räknefärdighet. Carleson beklagar reduktionen av geometrin och är orolig att den i dagens utformning består av för mycket utantillärande, som gör den tråkig.

Carleson understryker att det är svårt och tidskrävande att lära sig matematik:

> "För den framtida inställningen till ämnet är det viktigaste att man från början ger fullständiga förklaringar. Vi är som vuxna så inlärda och vana vid lågstadiematematiken att vi anser den självklar och oerhört enkel. Vi glömmer då att det tagit mänskligheten lång tid att konstruera systemet och att det kunde ha utformats på många andra sätt. Man får därför inte underskatta svårigheterna eller underlåta att förklara; det 'självklara' kanske inte är så självklart och de 'dumma' frågorna kanske bara avspeglar bristfälliga förklaringar.
>
> .....

> Vad man också måste acceptera är att aktiv, användbar kunskap kräver mycket övning av rutinkaraktär. Det är helt orimligt att man genom att ge eleverna förståelse för logiska sammanhang skall kunna kompensera träning och man skall komma ihåg att denna del av kursen just är motiverad av sin betydelse för tillämpningar. Min tro är att man nu fört in för mycket i kurserna och att resultatet kan bli att eleverna egentligen inte lär sig något alls. Det går heller inte att bortse från att kursernas innehåll måste anpassas till elevunderlagets förutsättningar att tillgodogöra sig innehållet."

Inställningen att kurserna blivit för omfattande genom 60-talets reformer delas av en bred majoritet.

I slutet av boken ger Carleson ett förslag till hur skolans matematikutbildning bör utformas. Han betonar förståelse och tycker att man kanske redan på lågstadiet kan behandla tvåsystemet: "Är det säkert att barn är främmande för abstraktioner av detta slag? Ju tidigare de införs framgångsrikt ju enklare blir det när de behövs på allvar senare". Om begrepp som mängd och funktion säger han: "Begreppen måste användas fortlöpande och införas så tidigt att de blir en del av det naturliga ordförrådet".

Vad gäller gymnasiets naturvetenskapliga linjer talar Carleson för att "den traditionella matematikkursen bör ges mindre formell stringens men med utökad exemplifiering". Han vill att 20 % av tiden ska användas till en orienteringskurs:

(a) en orientering om matematisk logik i lämplig anslutning till filosofiundervisningen

(b) en översikt av algebraiska strukturer, speciellt gruppteori

(c) en relativt omfattande orientering i topologi och särskilt den kombinatoriska topologin

(d) analys med speciell betoning av de partiella differentialekvationerna i fysiken och numeriska metoder

(e) sannolikhetsteori

(f) berömda matematiska problem. Här kommer naturligt en orientering i talteori in.

Statistikundervisningen vill Carleson göra mer deskriptiv och lägga inom ramen för samhällskunskap.

Utvecklingen i USA

Nacome

Den nya matematiken anses ju ha USA som sitt ursprungsland. Det är därför av särskilt intresse att följa vad som hänt med matematikundervisningen i USA under senare år. Det finns en utmärkt källa nämligen Nacome-rapporten "Overview and Analysis of School Mathematics,

Grades K-12" (1975). Nacome var en kommitté tillsatt 1974 av "The Conference Board of the Mathematical Sciences" med syfte att analysera matematikundervisningen i USA. Resultatet har bli-blivit en öppenhjärtig och auktoritativ rapport, som ska sammanfattas här.

Översikt

Nacome konstaterar att matematikundervisningen i USA befinner sig i en kris. Divergerande uppfattningar råder om bedömningen av nuläget och stor rådvillhet finns inför hur framtiden kommer att gestalta sig. Betydligt fler grupper av personer än tidigare har kommit att ta del av debatten kring matematikundervisningen.

Mycket ny matematik undervisas i dag i USA samtidigt som man måste konstatera att endast en mycken liten del av det som lanserades i samband med reformvågen på 60-talet har förverkligats i klassrummen. I stort är matematikundervisningen ganska oförändrad.

Nacome understryker kraftigt hur mångfasetterad situationen är i USA och hur svåröverblickbar den är. Besluten om hur undervisningen ska anordnas ligger i hög grad på delstats- och lokal nivå.

Kursplaneutvecklingen 1955 - 1975

Nacome anser att Bruners bok "The process of Education" (1960) samt de rekommendationer som gjordes 1959 av The College Examination Board och i den s k Cambridge-rapporten 1963 är centrala dokument och att de kraftigt påverkat utvecklingen. De ledde till att psykologiska faktorer i högre grad kom att beaktas i matematikundervisningen, varvid "rote learning" delvis ersatts med mer psykologiskt anpassad inlärning. Större vikt läggs numera vid förståelse och begreppsinlärande. Den nya matematiken ledde till att många nya moment på 1960-talet infördes i den elementära undervisningen. De flesta av dem har sedermera kommit i skymundan och de hoppas inte sällan över till förmån för de traditionella momenten.

Morris Klines bok "Why Johnny can't add" framförde en omfattande kritik mot den nya matematiken. Boken presenteras på sid 184. Enligt Nacome fick Klines bok "ett visst stöd men såg för överdrivet och ensidigt på problemen".

Mängdläran uppfattades av många som ett mål för matematikundervisningen, när den i själva verket bort uppfattas som ett medel. Lärare och läroböcker utnyttjade den ofta på ett felaktigt sätt. Dess användning har sedermera minskat och man har "i den andra generationen läromedel" kommit fram till ett förnuftigt utnyttjande av den. Detsamma gäller logiken som i början ofta användes fel. På denna punkt skjuter enligt Nacome Kline helt över målet. Numera är abstraktionsnivån lagom.

Räkning i andra baser än tio och ansträngningarna att göra åtskillnad mellan ett tal och ett namn för talet har numera kraftigt reducerats. Forskningsresultat har visat att vinsten var liten om än någon. Även den betoning som i början av den nya matematiken gjordes på stringens i symbolism och terminologi har minskats och man har i stort sett återgått till tidigare nivå. Nacome understryker dock behovet av att eleverna lär sig arbeta med symboler på grund av deras stora betydelse i det moderna samhället.

Nacome sammanfattar sin uppfattning med att den nya matematikens idéer var i princip riktiga men att konsekvenserna blev betydligt mer blygsamma än väntat. Den ökade tonvikten på förståelse av matematiska metoder, på användning av förenande begrepp och strukturer samt på ökad precision i uttryckssätten har lett till en ordentlig förbättring av matematikundervisningen i USA. Nacome påpekar att den nya matematiken uppfattats som en enhetlig rörelse fast den i själva verket varit mycket mångfasetterad. Nacome beklagar den överdrivna reaktion som inträffat med återgång till ålderdomliga mål och önskar att siktet inriktas på nya mål.

Nuvarande situation

När den nya matematiken infördes låg huvudvikten vid de högpresterande (college bound) eleverna men har numera skiftat att gälla

- de lågpresterande
- minimikraven på matematik i samhället
- nya tekniska hjälpmedel (dosor, datorer)
- tillämpningarnas roll.

Nacome finner ingen anledning att gå tillbaka till "räknefärdighetsbaserade" kursplaner. De nya hjälpmedlen gör drill ointressantare än någonsin. Nacome tror på metoder grundade på förståelse. De elever som ej lärt sig räkna i årskurs 8 bör få tillgång till räknedosor.

Nacome beskriver förhoppningsingivande försöksverksamhet med tillämpningar och användning av dosor och datorer. Det är dock ännu för tidigt att utvärdera den. Särskilt räknedosorna kan komma att innebära en omfattande omstrukturing av matematikundervisningen. Men ännu finns inga resultat.

I USA pågår också försök att införa mer sannolikhetslära och statistik samt metriseringskampanjen. Det förefaller som det är större svårigheter förknippade med att införa statistik än sannolikhetslära.

Många stater har lagt ökad vikt vid målformuleringar (i beteendetermer) och att knyta an dessa till evaluering. Nacome finner det önskvärt att uppmärksamma målsättningen men ser en fara i att fastlägga minimimål:

- de kan lätt uppfattas som tak
- undervisningen systematiseras för hårt för att målen ska nås
- man når ändå minimimålen om man arbetar att nå högre mål på grund av matematikens hierarkiska uppbyggnad.

Nacome talar för vida mål, flexibla kursplaner och varierande undervisningsmetoder.

Undervisningsmetoderna

Laborativa arbetssätt har genom forskning visat sig viktiga. Självinstruerande material har börjat användas allt mer. Multi-media-arbetssätt ökar liksom arbete med tillämpningar.

Det är svårt att bedöma hur dessa tendenser påverkat arbetet i det enskilda klassrummet. Enligt undersökningar företagna av Nacome har inte undervisningen i allmänhet ändrats så mycket. Särskilt tillämpningsanknytningar väcker motstånd. Forskningen har inte heller lyckats påvisa att någon undervisningsmetod är överlägsen de andra. Många små saker håller på att hända men det går uppenbarligen långsamt. Lärarna tycker emellertid att eleverna i dag lyckas bättre än förr. Lärarna föredrar läromedel som lägger vikt vid färdighet före begrepp.

Lärarnas utbildning och fortbildning

I samband med införandet av den nya matematiken i USA var fortbildningen av lärare klart otillräcklig. Det är svårt att få en överblick över hur lärarnas utbildning och fortbildning i praktiken går till. Matematikansvariga i USA är djupt otillfredsställda med matematikens ställning i lärarnas utbildning och är ännu långt ifrån övertygade om att "competence-based teacher education" är rätt metod.

Nacome konstaterar att vi ännu inte kan beskriva vad "god undervisning" innebär och vad som karakteriserar en "god lärare". Forskning efterlyses.

Resultat

Räknefärdigheten har successivt försämrats sedan 1960-talet. Enligt en totalundersökning i New York 1966 bestämde man prestationerna hos de 23 % sämsta i årskurserna 3, 6 och 9. 1973 använde man samma test. Då nådde 18 %, 32 % respektive 34 % ej upp till denna prestationsgräns; alltså bättre resultat i årskurs 3 men sämre i årskurserna 6 och 9. Motsvarande nedgång kan konstateras i färdighet i läsning. Liknande resultat finns från Kalifornien. Poängen vid prov i matematik vid inträde till college har sjunkit successivt från 1962 till 1975. Men de inträdessökandes verbala förmåga minskade också och kraftigare än matematikförmågan.

Man har också jämfört elever som arbetat med "nya" läroböcker med elever som arbetat med traditionella läroböcker. De nya böckerna gav något sämre räknefärdighet. Många andra skillnader kunde konstateras beroende på typ av lärobok. Nacome konstaterar att matematisk förmåga är långt ifrån ett entydigt begrepp.

Rapporten redogör också för uppgifter som man testat 9-åringar, 13-åringar, 17-åringar och vuxna på. Resultaten visar att det behövs mer förståelse för matematik och i viss mån högre räknefärdighet.

Nacome konstaterar att testningen av elevernas matematikkunskaper är mycket ofullkomlig och pekar på en rad brister. Slutsatser är svåra att dra på basis av nuvarande metoder.

Nacomes rekommendationer

Nacome avslutar med en rad rekommendationer inför framtiden. De understryker kraftigt lärarnas viktiga roller. De välkomnar politikers och föräldrars intresse för skolans matematikundervisning men menar att lärarna måste ges huvudansvaret. De rekommenderar intensifierad forskning och manar till samling för att attackera de många viktiga frågor som finns att lösa.

Why Johnny can't add

Ett uppmärksammat inlägg i debatten kring nya matematiken utgjorde Morris Klines (1973) bok "Why Johnny can't add". Han kritiserade starkt den nya matematiken av flera skäl. Den var för starkt logiskt-deduktivt uppbyggd, var för stringent och formell. Han tvivlade på att inslag som mängder, positionssystem med andra baser än tio, olikheter osv, vilka karakteriserade den nya matematiken, var värdefulla. Han ansåg att utprövningen av den nya matematiken var bristfällig och menade att fel grupper, dvs framför allt universitetsmatematiker av ett sterilt slag, kommit att dominera utvecklingen på ett mycket olyckligt sätt. Kline talar för en intuitiv informell uppläggning av matematiken med stark tonvikt på tillämpningar. Skolmatematiken har enligt honom inte främst sitt värde som abstrakt teoribildning utan som praktiskt hjälpmedel i vårt sätt att handskas med den konkreta verkligheten. Att stärka elevernas motivation är av primär betydelse.

Hans förslag till fortsatt reform av matematikundervisning förefaller utopiska och tar enligt min uppfattning inte tillräcklig hänsyn till skolans realiteter och framför allt de lågpresterandes problem. Han ser i för hög grad situationen från en matematikers utgångspunkt. Detta är samtidigt styrkan i hans bok genom att den gör den ämnesmetodiska kritiken av den nya matematikens avigsidor så träffande. I och för sig är alla beredda att skriva under på tillämpningarnas och motivationens betydelse. Svårigheterna är att hitta former för skolmatematiken som också säkrar kraven på räknefärdighet och är förenliga med skolans målsättning i stort. Klines önskan om en väsentligt förstärkt lärarutbildning och lärarfortbildning är en god hjälp men detta torde bara vara en åtgärd bland många på väg mot en bättre skolmatematik.

Mer om utvecklingen i USA

I sin bok "The Culture of the School and the Problem of Change" diskuterar Sarason (1972) införandet av den nya matematiken.

Han konstaterar att initiativet till reformen kom utifrån skolan, främst från universitetshåll utan att lärarna eller skolan syntes ha "bett om en reform". Reformen understöddes kraftigt av inspektörer och andra överordnade förmodligen på grund av deras anknytning till och förtroende för universiteten. Lärarna var enligt Sarason inte delaktiga i reformens genomförande. Resultatet av reformen bara innebar ett byte av "en uppsättning böcker mot en annan". Men matematikundervisningen var i grunden densamma och lika litet framgångsrik. Anledningen är främst att vi saknar kunskaper om skolans kultur, som är ytterst komplex. En absolut nödvändig förutsättning för att man ska kunna genomföra framgångsrika innovationer inom skolans värld är att man väl känner denna värld inifrån. Det hjälper inte med önsketänkande och goda intentioner utan det fordras "ett hängivet kämpande" med problemen av skolfolk.

Sarason menar också att lärarfortbildningen i anslutning till den nya matematikens införande var felaktigt upplagd. Lärarna blev frustrerade när de ställdes inför en ny matematik och fick oförtjänt dåligt samvete av den kritik som framfördes mot den dåvarande matematikundervisningen. Lärarna fick lära sig den nya matematiken på ett katedralt och påtvingat sätt, tvärtemot den metod som de rimligen borde använda då de själva undervisar i matematiken av i dag.

Sarason ger en ganska dyster bild av vår bristande kunskap om skolans värld och dess problem och därmed våra möjligheter att åstadkomma radikala och varaktiga förbättringar av utbildningen.

Slutsatser för svensk del

Jag har uppehållit mig vid förhållandena och utvecklingen i USA av flera skäl. Dels är landet högt utvecklat med en omfattande skolforskning. Om i något land forskningen skulle kunna avsätta praktiska resultat för klassrumsarbetet borde det vara i USA. Dels tog vi efter en del idéer från USA vid införandet av den nya matematiken. Det kan därför på sätt och vis sägas vara "att kika i facit" för vår egen närmaste framtid genom att se vad som händer i USA just nu. Utvecklingen i USA och Sverige förefaller emellertid ha varit parallell och har ägt rum ungefär samtidigt. Vi har därför inte så mycket att lära för framtiden utan får försöka bemästra problemen jämsides.

Skolforskningen har uppenbarligen inte ens i USA kunnat ge så många bidrag till förståelse av skolans komplexa värld att det i större utsträckning påverkat det praktiska skolarbetet. Slutsatsen blir här att skolforskare i världens alla länder i samarbete bör kämpa vidare för att på ett förutsättningslöst sätt öka kunskaperna om utbildning. Situationen förefaller tala för att grundforskningen ges företräde före kortsiktigt målinriktade projekt.

Lärdomar av de senaste årens utveckling

Den analys som jag genomfört i avsnitt 2.1 ger följande lärdomar för framtiden.

- Det är uppenbarligen svårt att åstadkomma större ändringar av matematikundervisningen.

  Den stora reformvågen "den nya matematiken" gav t ex inte på sikt några stora revolutionerande ändringar. Den ledde till en del metodiska förbättringar men åstadkom också mycken förvirring.

- Man bör hysa en stor respekt för den praxis enligt vilken matematikundervisning i dag bedrivs.

  Den matematikundervisning som bedrivs i dag är resultatet av en lång empirisk process. Den pedagogiskt-ämnesmetodiska vetenskapen har ännu inte lyckats ställa upp några tillfredsställande förklaringsmodeller men heller inte lyckats skapa några hållbara alternativa former för att bedriva matematikundervisning. I avvaktan på att vi kan vetenskapligt systematisera det samlade vetandet om hur matematikinlärande bör gå till bör vi vid reformarbete noga analysera vilka konsekvenser olika typer av åtgärder för med sig. Det finns många exempel på att reformåtgärder fått helt oanade konsekvenser på grund av att man inte förstått hur systemet i sin helhet fungerat.

- För att kunna genomföra en reform av matematikundervisningen måste lärarna ha förstått och accepterat syftet med reformen.

  I fallet med den nya matematiken var felet snarare att man inte förstått hur den lämpligen skulle läggas upp än att man inte accepterade den.

- Varje lärares personliga professionalism är viktig.

  Undervisning är fortfarande kvar i ett hantverksstadium och det är troligt att den hellre bör utvecklas mot konsthantverk än mot en industri. I ett hantverk är den enskilde yrkesutövarens professionella kunnande centralt. Detta gäller i hög grad om undervisning och stora ansträngningar bör läggas ned på lärarutbildning och lärarfortbildning. Inte minst viktigt blir att skapa ett utvecklingsmedvetande hos varje lärare så att han/hon ständigt arbetar med att förnya sig och hitta arbetsformer som bättre tillvaratar lärarnas personliga förutsättningar i relation till den aktuella uppgiften.

- Realistiska bedömningar måste göras angående vad matematikinlärande kräver i form av

  tid
  förkunskaper hos eleverna
  förmåga hos eleverna
  intresse och motivation hos eleverna.

De gångna åren har visat många exempel på att man underskattat tidsåtgången och överskattat elevernas förkunskaper, förmåga och motivation. På grundskolans högstadium har framför allt bristande motivation bland lågpresterande elever varit ett allvarligt hinder. På annat sätt kan man inte förklara det klena studieresultatet i matematik. Eleverna har helt enkelt inte brytt sig om att lära sig det de ålagts. Förmodligen ligger felet i att man tvingar dem till ett matematikinlärande som de ej behöver.

o Det krävs en precisering av vilket målet är för skolmatematiken och en allmän uppslutning bakom detta.

Man är ense om matematikens roll som viktig "kommunikationsfärdighet". Vad detta innebär praktiskt råder det stor oenighet om. Gäller det bara elementär räknefärdighet, som många tycks anse, och i vilken utsträckning kommer t ex problemlösningsförmåga med i bilden? Och hur undervisas om matematiken som kulturföreteelse? Kanske hade de senaste årtiondenas vacklande hit och dit kunnat minskas om man haft en klarare målsättning. Ofta orsakades svårigheter av att man trodde sig arbeta mot ett visst mål medan man i realiteten haft ett annat.

o Skolans omgestaltning leder till en förändring av arbetsformerna i matematik, vars konsekvenser måste beaktas.

Genom skolans omgestaltning har skolklasserna från och med högstadiet blivit heterogenare åtminstone vad gäller elevernas möjligheter att tillägna sig matematikkunskaper. Det beror på breddningen av skolan och slopandet av underbetyg och kvarsittning. Detta har lett till att arbetsformerna ändrats så att individuellt arbete (tyst räkning) dominerar. En annan konsekvens är att uppgifterna har blivit enklare. Bedöms dessa konsekvenser som önskvärda är allt bra. Det finns emellertid skäl att anta att denna förändring av arbetsformerna kommer att påverka kunskapsbehållningen hos stora elevgrupper på ett sätt som i dag är svårt att genomskåda.

o Genom en undervisning som i icke ringa utsträckning replierar på skruvinlärande bör alla elever i grundskolan kunna tillägna sig brukskunskaper i matematik.

Målet är att när en individ lämnat grundskolan ska han/hon åtminstone stå rustad att möta problem av matematisk natur som uppkommer i "normalt" vardagsliv. Nu kan ju normalt vardagsliv innebära väsentligt olika saker för olika individer. Det kan innehålla mycket matematik eller litet. Vanligtvis är det relativt litet, åtminstone den matematik som individen märker och som tränger sig på honom/henne. Därutöver finns det en massa situationer då individen skulle kunna utnyttja matematik men inte gör det. De matematikkunskaper som krävts för ett sådant utnyttjande har jag tidigare kallat initiativkunskaper. Se sid 31. Det kunnande som jag menar alla elever ska få med sig från grundskolan är emellertid just brukskunskaper så som de definieras där.

Det är naturligt att skaffa sig dessa brukskunskaper genom i huvudsak skruvinlärande som det beskrivs på sid 38. Den matematik som förekommer i vardagslivet är mycket nära knuten till konkreta situationer och utgörs nästan enbart av förstahandsabstraktioner. Det går i allmänhet bra att efterlikna sådana situationer i klassrummet och i läromedlen så att eleverna relativt lätt kan få grepp om den matematik det är fråga om. Det gäller främst att ge eleverna en mångfald varierande exempel så att de kan arbeta intensivt och vänja sig vid den matematik det är fråga om. Detta innebär inte att undervisningen inte ska vara förståelseinriktad. Matematiken bör presenteras på ett mångfasetterat sätt och läraren bör hjälpa varje elev med lämpliga förklaringar och försöka få i gång diskussioner.

Jag har tidigare konstaterat att det fordras goda matematikkunskaper (primärkunskaper) för att man ska kunna tillämpa matematik, dvs att utgående från en praktisk situation kunna välja ut en matematisk modell och använda den för att lösa något problem. Man får inte ställa för stora krav på att eleverna ska kunna tillämpa den matematik som de just har lärt sig utan eleverna bör främst arbeta med att tillämpa matematik från tidigare årskurser. Jag tänker då närmast på tillämpningar som kräver initiativkunskaper. Vid brukskunskaperna är det knappast fråga om en tillämpningsprocess. Eleven kan den matematik det gäller just genom att den är knuten till en eller flera praktiska situationer. Man kan säga att eleven kan matematiken i sin tillämpade form.

o Varje elev bör i varje skolform få försöka tillägna sig vissa initiativkunskaper i matematik.

Eftersom man inte kan använda initiativkunskaper utan en positiv inställning bör arbetet vara frivilligt t ex i form av tillvalskurser. Spikinlärande är av naturliga skäl den dominerande inlärningsformen.

Makthavarna

I avsnitt 2.2 diskuterade jag makthavarna inom svensk matematikundervisning. Denna analys ger följande bakgrund vid en planering av skolans matematikundervisning i framtiden.

o Utbildningspolitikerna har genom sin omstrukturering av svensk skola kraftigt påverkat matematikundervisningens villkor. Deras roll kommer att bli viktig även i framtiden och matematiken kommer att vara ett principiellt viktigt ämne i diskussionen kring skolan och dess roll i samhället. Det gäller därför att göra debatten kring skolmatematiken så saklig som möjligt och göra utbildningspolitikerna välinformerade. I fortsättningen bör inte de beslutande vid framtida reformer kunna falla tillbaka på fromma förhoppningar om att "allt går nog bra". De bör vara klart medvetna om vad olika åtgärder får för konsekvenser. De bör t ex veta vad som för framgångsrik matematikundervisning krävs av tid, förkunskaper, förmåga och motivation.

- Den andra stora maktfaktorn utgörs av lärar-elev-kollektivet. En framgångsrik framtida reform måste förmodligen komma inifrån detta kollektiv eller åtminstone till 99 % accepteras av det. Detta innebär för lärarnas del att reformen måste ge dem en acceptabel arbetssituation. Samtidigt måste reformen vara ideologiskt förankrad bland dem. Den måste vidare uppfylla elevgruppens faktiska önskemål om att göra målet för matematikundervisningen meningsfullare. Vidare måste svåra glapp elimineras som t ex att elever när de börjar på NT-linjen eller vid teknisk högskola ställs inför en undervisning som kräver förkunskaper och förmåga som de inte har.

Intressentgruppernas mål är motstridiga

Callewaert m fl (1972) har studerat de motsättningar som målkonflikter mellan och inom intressentgrupper inom skolan leder till. Det gäller bl a skolans socialiserande uppgift gentemot elevdemokrati, elevcentrering och samhällsförändring samt strävan att främja samarbete gentemot skolans urvalsroll. De har genomfört en intervjuundersökning och funnit att vissa konflikter i skolan kan förklaras genom denna målkollision.

Det kan ha sitt intresse att se vilka målkonflikter det kan finnas vad gäller matematikundervisningen. Jag försöker först i förenklat skick formulera några av de inblandade intressentgruppernas mål.

Politikernas (dvs de dominerande gruppernas inställning)

- Att alla ska få utveckla sin förmåga att använda matematik
- Att alla lär sig tillräckligt med matematik för behoven i sitt vardags- och yrkesliv
- Att inlärande kan ske utan alltför stora "biverkningar" för både individ och samhälle
- Att matematikinlärandet sker i överensstämmelse med skolans mål i övrigt
- Att differentiering sker sent så att sociala orättvisor reduceras

Individens

- Att lära sig så mycket matematik att man "klarar sig i livet"
- Att få göra roliga saker i matematik
- Att lära sig den matematik som behövs för det yrke man vill välja
- Att inte tvingas (luras) lära sig matematik som man inte behöver
- Att inte behöva offra andra mål för matematikens skull
- Att "lyckas" i största allmänhet

Lärarnas

- o Att eleverna lär sig mycket matematik
- o Att inte behöva ställa elever inför krav som de har svårt att uppfylla
- o Att arbeta med elever som är angelägna att nå uppställda mål
- o Att "lyckas" i sitt arbete i största allmänhet

Det finns också andra intressentgrupper med delvis andra mål men låt mig inskränka mig till ovanstående tre grupper. Det går omedelbart att konstatera att redan de olika målen för varje grupp är motstridiga och inkonsistenta. Detta är en konfliktorsak inom skolan. Konflikterna förstärks av att varje individ ofta har egoistiska och kortsiktiga mål som ofta dominerar över mer långsiktiga mål som för gruppen objektivt sett vore angelägnare. Till detta kommer sedan att intressentgruppernas mål är sinsemellan oförenliga och delvis talar mot varandra.

Differentiering

Den mest diskuterade och kanske därmed principiellt viktigaste motsättningen inom skolmatematiken rör differentieringen. Ska den ske tidigt eller sent?

Skolpolitikerna är ingen enhetlig grupp men de som varit tongivande under senare år vill uppskjuta den organisatoriska differentieringen av matematikundervisningen så länge som möjligt. Vid en tidig differentiering tvingas eleverna till viktiga val mellan olika kursalternativ vid för unga år. Det finns en tendens till att sådana val är "irreversibla" i den bemärkelsen att om man väljer en lättare matematikkurs har man svårt att sedan komplettera för att kunna välja en utbildning som kräver en större matematikkurs.

Lärare och andra företrädare för utbildningar som kräver goda förkunskaper i matematik önskar vanligtvis en tidig differentiering. Därmed vill man göra effektivitetsvinster och nå bättre kunskapsresultat.

Mycket vore vunnet om man kunde hitta ett sätt att organisera skolmatematiken så att en elev redan tidigt har en viss valfrihet mellan delkurser med olika inriktning och alltså kan testa sin förmåga och sina intressen samtidigt som eleven inte missar möjligheten att lära sig den matematik han/hon behöver för sin yrkesutbildning. Jag skisserar i nästa avsnitt en modell som skulle uppfylla långtgående anspråk i detta hänseende.

3.1.2 FÖRSLAG

Jag ger nedan ett förslag till ett alternativ till nuvarande uppläggning av skolans matematikundervisning.

- Läsåret indelas i fyra perioder. De två första är lika långa och omfattar tillsammans höstterminen. De blir åtta veckor vardera. Den tredje perioden är också lika lång, dvs åtta veckor, medan den fjärde, som omfattar resten av vårterminen, blir något längre eller cirka elva veckor.

- Läromedlen uppdelas i häften - moduler - så att varje modul innehåller lagom arbetsmaterial för en period. Sådana moduler kan se ut på olika sätt men en vanlig typ har följande uppläggning: Den handlar ett relativt avgränsat stoffområde och består av

  förtest
  kortfattad teori
  motiverande exempel
  instruerande exempel
  övningar
  svårare övningar
  eftertest.

  Dessutom finns moduler som handlar om ett speciellt yrkes- och intresseområde eller hämtar stoff från flera sådana områden. I viss utsträckning görs modulerna självinstruerande så att elevgrupper kan arbeta med dem utan alltför mycket lärarhjälp. Därmed underlättas differentiering inom klassens ram.

- På låg- och mellanstadiet arbetar alla elever under var och en av de tre första perioderna med samma häften. I dem ges allt centralt stoff, dvs baskursen. Under den fjärde perioden arbetar eleverna med moduler av överkurskaraktär, t ex med matematik från yrkes- och intresseområden. Sådana moduler kan också innehålla mer kvalificerat matematiskt stoff eller material som ger en avancerad räknefärdighet.

  Under denna fjärde period reparerar elever som inte lyckats så bra med de tidigare modulerna sina brister. Vid stora brister kan en elev behöva ägna hela fjärde perioden åt repetitionen. Vanligtvis har eleven inte så stora luckor och hinner då också arbeta med överkursmodulen i större eller mindre utsträckning.

  Om läraren (skolan, kommunen) så önskar kan i det avslutande testet till varje modul som används under de tre första perioderna anges en "godkändgräns" som en elev måste nå för att slippa repetera under den fjärde perioden. De elever som inte uppnått godkändgränsen får under fjärde perioden försöka att uppnå den vid nya liknande test. Först får de arbeta med lämpligt träningsmaterial.

  Med denna uppläggning kan man få förbättrade garantier att en elev har de basfärdigheter som fordras för att gå vidare. Samtidigt undviker man risken att denna basfärdighet blir ett tak för elever med stort intresse och bättre förutsättningar. De förkovrar sig ju ytterligare i fjärde perioden genom sitt arbete med kvalificerat material.

I stället för att ange en godkändgräns vid testen till basmodulerna kan klassen arbeta med flera gränser på olika nivåer. En elev kan då i samarbete med läraren bestämma sig för att försöka nå en viss nivå och sedan inte ge sig förrän han/hon nått dit även om en del av fjärde perioden måste användas.

- På högstadiet ökas valfriheten. Alla gör dock samma häfte under minst en period per årskurs. Det bör vidare finnas sex mer matematiskt inriktade moduler som utgör en lämplig grund för dem som vill gå på N- och T-linjen i gymnasieskolan. Därutöver ska eleverna kunna välja mellan en rad tillämpnings- och intresseområdesinriktade häften. Det yrkesförberedande innehållet är viktigt.

  Systemet med den fjärde perioden som repetitions- och uppföljningsperiod, som det skisserades ovan för låg- och mellanstadiet, är än viktigare på högstadiet.

  En elev kan klara tre av de matematiska modulerna i vardera årskursen 8 och 9 och kan alltså relativt sent bestämma sig för att förbereda sig för N- eller T-linjen. Särskilt period 4 blir viktig för elever som vill läsa "ikapp".

- Även i gymnasieskolan används samma uppläggning, varvid den fjärde perioden har samma viktiga roll.

  Det finns framför allt moduler av följande karaktär.

  Matematiskt avancerade häften

  Specialinriktade häften mot yrkes- eller intresseområden

  Allmänt kompetensstärkande häften, varav vissa är gemensamma med grundskolan

- Ett kort upprättas för varje elev angående vilka principiellt viktiga moduler som eleven fullgjort på godkänt sätt. Detta kort följer eleven från grundskolan till gymnasieskolan. Basmodulerna förutsätts alla ha arbetat med tills de kan dem tillfredsställande. Några resultat från dem antecknas således inte. Man klarar sig med detta system utan betygsättning. Det eleven har med sig från skolmatematiken är någon form av dokument som visar vilka specialmoduler vederbörande fullgjort på godkänt sätt, precis som i dag fritt valt arbete, specialarbete och liknande, och anges på betyget.

  De flesta elever som börjar N-linjen på gymnasieskolan har arbetat med samtliga sex matematiska moduler på högstadiet. Detta finns angivet på deras kort. Elever kan emellertid också antas till N-linjen fast de saknar några av de matematiska modulerna. De får i stället arbeta intensivt med dem i början av gymnasiet. Då behövs kortet för att veta vad eleven klarat under grundskoletiden.

3.2 Teknisk högskola

3.2.1 PERSPEKTIV

Såsom i avsnitt 3.1 angående skolans matematikundervisning inleder jag med att ge vissa utblickar och perspektiv inför det förslag till hur matematikutbildningen bör läggas upp på 1980-talet som kommer att presenteras i avsnitt 3.2.2.

Återskapande

I sin bok "Mathematics as an Educational Task" myntar Freudenthal (1973) begreppet "re-invention" för en undervisningsform som lägger stor vikt vid aktivitet:

> "Most presentday educators look on teaching as initiation into certain activities. Science at its summit has always been creative invention, and today it is even so at levels lower than that of the masters. The learning process has to include phases of directed invention, that is, of invention not in the objective but in the subjective sense, seen from the perspective of the student. It is believed that knowledge and ability acquired by re-invention are better understood and more easily preserved than if acquired in a less active way."

Freudenthal menar det vara en viktig metod för att lära sig tillämpa matematik att inte möta matematiken som en färdig (ready-made) produkt utan under inlärandet arbeta som om man återskapade matematiken. Han understryker att detta ofta är svårt att genomföra men ger exempel på områden där metoden kan användas.

En europeisk konferens om matematik för ingenjörer

I rapporten från en OECD-konferens (1965), "Mathematical Education of Engineers", tar man upp frågan om samarbete mellan matematiklärare och lärare i andra ämnen och understryker vikten av att teknologernas motivation stärks.

> "At the introduction of a new topic, particularly in the first year, the engineer should be provided with a motivation for its study through a discussion of some of the applications of the subject which are likely to stimulate his comprehension as well as his interest. This should be followed by an inductive-intuitive development in which there is some discussion of examples of the physical significance of the method. Each topic should finally be established on a sound deduction basis of limited generality but indications may be given of the possibility of further generalisation or abstraction which may be introduced in later and more specialised courses.
>
> Demonstrators, assistants or lecturers from engineering departments should be used to assist in the preparation of problems and in giving exercise classes. This is one of the best ways of insuring real contact between the staffs of the mathematical and engineering departments and can be a useful source of problems of current interest to the students."

- - - - -

"The development of the ability to think analytically is a vital purpose in engineering courses. The Seminar believes that both mathematics staff and engineering staff have a responsibility to discuss the relationship between mathematical systems and physical systems with their students. This can only be achieved effectively by consultation and close cooperation between the mathematics and engineering lecturers in the detailed planning and implementation of the teaching programme."

Rapporten diskuterar också hur abstrakt matematikundervisningen bör vara och rekommenderar en kompromiss.

"The depth of the treatment in the presentation of mathematics to engineers is a vexed question. The student should have some appreciation of the mathematician's attitude to mathematics and must always be aware of the limits of applicability of the methods which he has presented to him. The rate of introduction of new topics should be limited, but subjects which are introduced in a simple form one year may be generalised considerably in the next."

Vidare rekommenderar man starkt kurser i statistik och sannolikhetslära, numeriska metoder och programmering. En integration av datoranvändning understryks som särskilt angelägen.

Angående matematikens omfattning heter det:

"The Seminar recommends that the balance of subjects in all years of engineering courses be examined carefully to determine whether the proportion allocated to mathematics is sufficient in view of the increasing importance of computation to the engineer."

I rapporten sammanfattas en kritisk studie av Scott m fl (1966) över matematikanvändning inom den elektriska industrin. Den visar samma bild som andra liknande undersökningar, nämligen att majoriteten av ingenjörerna använder litet matematik under sin yrkesutövning. Endast 12 % (av cirka 3 000 tillfrågade) använder avancerad matematik mer än en gång i månaden. En mindre grupp ingenjörer visar dock hög användning. Hälften av alla tillfrågade ansåg att brister i deras matematikkunnande var hämmande för arbetet. En genomgång av artiklar i elektriska facktidskrifter visade att 40 % inte innehöll någon matematik medan 20 % bara innehöll elementär matematik. Majoriteten av ingenjörerna läste artiklar med matematiskt innehåll men de flesta menade att det inte gjorde så mycket om man ej helt kunde tillgodogöra sig det matematiska innehållet.

Miniprojekt

Bajpai m fl (1976) från Loughborough i England har förslag på hur matematikundervisningen för ingenjörer kan förnyas. De talar till förmån för "an integrated approach", där analytiska,

statistiska, numeriska och datortekniska metoder kombineras. De exemplifierar med behandlingen av gränsvärden, kurvanpassning och egenvärdesproblem. Praktikfall rekommenderades:

> "From time to time during the course, case studies should be presented in order to illustrate the application of mathematics to solve problems which arise in real-life engineering contexts. If possible the case study should involve several mathematical techniques so that the lecturer can make the very important point that in real life the solution of a problem requires all the engineer's mathematical expertise and he cannot expect the problem to fit nicely into a standard drill example pattern. The author's experience is that a few carefully chosen case studies, which are developed in lecture and tutorial periods, are of benefit in maintaining the motivation of the students."
>
> - - - - -
>
> "To make the case study more meaningful, a shared lecture approach has been found successful. An engineering lecturer can set up the problem in engineering terms and then hand over to his mathematical colleague who will solve the relevant mathematical model. The engineer will then interpret the results in terms of the original problem and may return to the mathematics lecturer with a revised model."

Även miniprojekt förespråkas:

> "We argue that the introduction into the mathematics course of mini-projects at second-year level (and possibly at first-year level) not only gives the student advance practice of project techniques but also allows him the luxury of using mathematics at his own discretion.
>
> Of course, mini-projects can take too much time unless care is taken to exercise a reasonable control over the line of attack. A help in this direction is the use of prepared programme packages. We give three examples of possible mini-projects of varying degrees of difficulty."

Exemplen avser diffraktionsgitter, regressionsanalys och rörnätverk.

Författarna tror att det arbetssätt de rekommenderar kräver en förändrad lärarroll:

> "We require both mathematics and engineering staff to gain expertise in presenting the mathematics via this new approach. The mathematics lecturer must become au fait with numerical, computer and statistical methods as well as the analytical techniques with which he is more familiar. Let us not forget that many lecturers who graduated before about the mid 1950s may have had no formal instruction in numerical analysis and statistics and they may feel none too happy about acquiring these new skills relatively late in their careers. Also, they will need to have

> a broad view of the integrated approach to mathematics that we advocate. Furthermore, the mathematics and engineering staff must liaise to a greater degree than is usual; they must be prepared to invest time in working together on case studies and joint presentations. They should not think of the short-term so-called 'waste of resources' - they should think of the long-term benefits educationally."

Artikeln avslutas med en förhoppning om hur de studerande bör ta emot matematikkurser.

> "If the engineering undergraduate finds his mathematics course stimulating, relevant and useful, then we shall be satisfied. He should be able to see the part played by mathematics in his engineering subjects; he should be interested in learning more mathematics; he should be mathematically competent. Of course, we would hope that the student will be able to call upon a range of techniques and choose the one or ones most suitable to the problem under consideration. However, there is a danger that too much attention is given to making the mathematics palatable. At the end of the day, the student must be able to perform the techniques of mathematics demanded in his engineering curriculum. If a course does not provide the necessary technical expertise then it has let down the student and/or the objective. Such a course may well lead the engineering departments to devise and run their own mathematics course."

Den tredje kongressen för matematikundervisning 1976: Universitetsundervisningen

Vid kongressen var undervisningen på universitetsnivå ett av huvudtemana (UNESCO, 1978). Före kongressen hade en enkät utsänts till 200 universitet över hela världen. Med svaren på denna som underlag utarbetades en trendrapport.

De senaste tjugo åren har i nästan alla länder karakteriserats av en ökande abstraktionsnivå. Så har t ex vanligtvis geometri försvunnit och blivit till linjär algebra. Under senare år har en reaktion uppstått, bl a orsakad av försämrad motivation. Det har också visat sig att svagare studerande fått ökade svårigheter. I enkätsvaren och under kongressen riktades starka klagomål mot "den nya matematiken" i skolan som lett till försämrad räknefärdighet hos de studerande som universiteten mottar. Den försämrade räknefärdigheten hänger också samman med den breddade intagningen, som är en universell trend.

Matematikundervisningen vid universiteten har under senare år fått ökade inslag av sannolikhetslära och numeriska metoder. På vissa håll har kurser om matematiska modeller införts, samtidigt som kontakten med fysik blivit sämre. I stället har matematiken fått ett vidare tillämpningsfält.

Vad gäller arbetsformer är utvecklingen försiktig. Vissa försök med "self-made courses" pågår. Problemlösningens ställning håller på att gradvis försämras.

En konferens 1976 med matematiklärare och lärare i tekniska ämnen vid M-KTH

I november 1976 ägde på KTH rum en tvådygns internatkonferens med temat "M och matematiken". Jag ska i detta avsnitt förmedla vissa intryck som jag fick under konferensen.

Det framförs då och då kritik från de tekniska ämnena mot matematikundervisningen vid KTH och det existerar en skillnad i grundsynen mellan matematiker och tekniker angående matematikundervisningens syfte och uppläggning. Det var bäddat för en konfrontation mellan dessa två grupper vid konferensen. Av detta blev emellertid intet. Konferensen blev snarare en manifestation av samförstånd. De närvarande representanterna från de maskintekniska ämnena accepterade den nuvarande omfattningen av matematikundervisningen och föreföll heller inte vilja föreslå ändringar av innehåll eller uppläggning. Man menade att matematiken används i så många och principiellt olika sammanhang att det är svårt - och i många hänseenden meningslöst - att specificera vilka de exakta kraven är för varje typ av användning. Det önskvärda i detta läge är att ge teknologerna ett sammanhängande block av matematiskt kunnande och därvid bygga på de omfattande samlade erfarenheter som finns om hur matematikinlärande går till.

Matematikerna å sin sida förklarade sig beredda att försöka arbeta vidare på den inslagna vägen. Man ville ha respekt för de svårigheter det innebär att vänja teknologerna vid det fordrande och intensiva arbetssätt som högskolestudierna innebär och att åstadkomma en hög andel godkända med tillräckligt matematiskt kunnande för att klara ämnena som tillämpar matematik. Man gjorde inget utspel om nya inslag eller modifieringar av kursen.

Under diskussionerna snuddade man vid frågor om en differentiering av matematikkurserna med hänsyn till teknologernas intresse och specialisering (stomplanelinje), om integrering av kurserna i matematik och numeriska metoder, om ett utökat personalutbyte mellan matematik och tekniska ämnen, om räknedosornas roll m m. Genom ett fortsatt gott samarbete föreföll det finnas möjligheter att vidare bearbeta dessa frågor för att successivt förbättra matematikundervisningen och anpassa den till framtida ändrade krav.

M-utredningen 1977

Utbildningsrådet för maskinteknik genomförde 1976-77 en utredning om den framtida inriktningen av den maskintekniska utbildningen vid de tekniska högskolorna. Rådet framför inga mer omfattande förslag till nyordning utan slår vakt om det bestående. Det konstaterar den kris med försämrade studieresultat som uppstått och lägger skulden på gymnasieskolan (se UHÄ-rapport 1977:3):

> "..... i den undervisning som meddelats i gymnasiet under senare år har endast minimal övning förekommit i att systematisera och analysera ett matematiskt och tekniskt orienterat problem."

Rådet framför vidare: "Det är glädjande att konstatera att den gruppundervisning med omkring 25 elever under en universitetslektors ledning som införts för den grundläggande matematikundervisningens effektivisering vid KTH givit så gott resultat både vad avser kvalitet och använd tid. Rådet anser att denna typ av undervisning bör införas för alla de teoretiska ämnen .....".

Rådet anför vidare:

> "När nu de senaste åren enligt vad ovan sagts resultatet av den teoretiska utbildningen vid högskolorna börjat svikta är Rådet mycket angeläget om att studieförhållandena förbättras så att ingen avprutning på varken teoretiska eller praktiska grundutbildningen äger rum. Den svenska högskoleingenjörens nivå får ej sänkas.
>
> Kursinnehållet i de tekniska basämnenas grundutbildningsdel bör bättre definieras än vad nu är fallet. Samråd bör äga rum mellan högskolorna. Av yttrandena från de olika ämnesgrupperna framgår att man anser att vissa högskolor bör komplettera och utvidga denna utbildning. Rådet har instämt i detta men vill samtidigt poängtera vikten av att ej ge avkall på den grundläggande teoretiska utbildningen."

Rådets inställning innebär för matematikens del att någon ändrad målsättning inte behöver övervägas. Inte heller är det aktuellt med en differentiering av målen för matematiken, eftersom det största matematikbehovet finns i de övriga grundläggande ämnena och dessa rekommenderas vara oförändrade.

Resultaten av mina enkäter och intervjuer

Genom de enkäter och intervjuer som utförts inom ramen för mitt projekt har jag erhållit en ingående belysning av matematikutbildningen inom den högre tekniska utbildningen, exemplifierad av den maskintekniska vid KTH. I avsnitten 2.3.1 - 2.3.5 har jag analyserat resultaten. Kortfattat kan dessa sammanfattas i följande punkter.

1 Det dominerande matematikbehovet föreligger vid studiet av de övriga ämnena i den fortsatta utbildningen. Användningen av matematik under yrkesverksamheten varierar starkt beroende på ingenjörens arbetsuppgifter. Den är i allmänhet relativt låg.

2 Teknologer och lärare i andra ämnen är i stort sett ense om att stoffinnehållet i matematikutbildningen är det rätta. Teknologerna önskar större tonvikt på metodkännedom medan lärarna hävdar räknefärdighetens och begreppsförståelsens roll. Båda parter anser att de viktigaste delarna av stoffet återfinns redan i gymnasiekursen men att denna dock inte är tillräcklig.

3 Ämnesföreträdarna bedömer att matematikbehovet kommer att vara i stort sett oförändrat under de närmaste åren. De anser det inte möjligt och lämpligt att omstrukturera sitt ämne så att det kräver mindre matematik än nu.

4 Medvetenheteten och intresset för frågor angående målsättningen för den högre tekniska utbildningen måste bedömas relativt låg hos alla parter. En trolig anledning är dessa frågors komplexitet och att den beteendevetenskapliga forskningen inte hunnit längre i att klarlägga orsakssammanhangen och skapa hållbara teorier. I detta läge har traditionen kommit att dominera med därmed följande försiktighet i utvecklingen.

5 Matematikbehovet vid högre teknisk utbildning kan under vissa omständigheter inskränka sig till i huvudsak brukskunskaper. I vissa specialiseringar behöver teknologerna inte ta några matematiska initiativ, inte skapa några egna modeller eller lösa några matematiska problem. Det räcker med att de kan utföra en numerisk beräkning, förenkla ett uttryck, lösa en integral, följa en matematisk framställning osv. Av ämnesföreträdarnas svar förefaller det som om de t ex på M-KTH är beredda att nöja sig med ett matematiskt kunnande av detta slag, dvs nöja sig med brukskunskaper av kvalificerad matematik och initiativkunskaper på mer elementära delar.

Samtidigt är det angeläget att inte alla teknologers matematikkunskaper begränsas på detta sätt. Inom t ex det maskintekniska området behövs ett antal ingenjörer med ett stort mått av matematiska initiativkunskaper som de kan utveckla. Det är svårt att på förhand veta om en person har en sådan förmåga eller inte. Inte ens i efterhand kan man så lätt avgöra det genom att det är svårt att testa det som diskuterades tidigare. Utbildningen bör därför vara upplagd så att alla får chansen att tillägna sig sådana initiativkunskaper. Det är däremot meningslöst att försöka tvinga alla att göra det. Det går ofta inte utan att ta till inlärningsvägar som gör resultatet i princip oanvändbart.

6 Under de egentliga matematikkurserna lär sig teknologerna inte att tillämpa matematik. I de övriga grundläggande ämnena får teknologerna träning i att använda matematiken. I dominerande utsträckning sker detta i standardmodeller och på ett mycket stereotypt sätt. Någon direkt träning i att tillämpa sina matematikkunskaper förutsättningslöst inom övriga ämnen eller på mer öppna tekniska problem får teknologerna knappast alls. Det förefaller dock som om både myndigheter, teknologer och lärare är relativt nöjda med detta förhållande. Matematikundervisningen har därvid en mycket begränsad - men icke desto mindre mycket viktig - roll i att ge god räknefärdighet och metodkännedom samt en elementär begreppsförståelse.

7 Enligt teknologerna utnyttjas inte den matematik som de lärt sig i full utsträckning. Även flera utbildningsplanerare har konstaterat detta med beklagande. En viss defaitism förefaller prägla många ämnesföreträdare. När de försöker utnyttja litet mer avancerade delar av den matematik teknologerna lärt sig möter de ett starkt motstånd framför allt genom att många teknologer klarar det så dåligt. Ämnesföreträdarna ger då lätt upp och använder enbart enklare matematik, vilket i sin tur leder till att teknologerna inte får träning i att använda de mer avancerade delarna av matematiken.

8 Samarbetet ämnena emellan lämnar mycket övrigt att önska. Teknologerna bedömer matematikinstitutionen som isolerad och tror att matematikerna sällan träffar lärare i andra ämnen. Rent sakligt får man ge dem rätt.

9 De yrkesverksamma ingenjörerna betonar särskilt värdet av god förmåga i överslagsräkning och i att genomföra logiska resonemang. Även teknologer och högskolelärare delar denna uppfattning.

10 Den gamla motsättningen mellan matematiken och tillämpare om hur teoretisk matematikundervisning bör vara har kommit i dagen genom de enkäter och intervjuer som företagits. Den har dock inte varit särskilt accentuerad. Icke-matematiker menar att vissa teoretiska delar av matematiken är onödiga för tillämpare.

11 Traditionellt dominerar uppgiftslösandet som undervisningsform. Detta accepteras av alla inblandade parter. Föreläsningar som undervisningsform uppskattas vanligen inte av teknologerna.

12 Under det senaste decenniet har antagningen ökat kraftigt till teknisk fakultet, gymnasieutbildningen har förändrats och intresset att söka till teknisk utbildning har minskat. Dessa fakta förefaller vara huvudorsakerna till att studieeffektiviteten sjunkit kraftigt vid teknisk fakultet. Många studieavbrott och förlängda studietider noteras. Den vanligaste orsaken till studieavbrott är att man finner studierna för svåra. Matematiken ligger i topp bland de ämnen teknologerna tycker är svåra. Matematikundervisningen anklagas emellertid inte för att vara felaktigt upplagd eller vara för krävande. Ska teknologerna kunna klara de övriga ämnena som använder matematik fordras att matematikkraven upprätthålls. Därom är alla ense. Matematikinstitutionerna har vidtagit olika typer av åtgärder för att hjälpa teknologer med matematiksvårigheter och teknologerna är i huvudsak nöjda med matematikundervisningen.

13 Förkunskaperna i matematik från skolan har försämrats. Huvudorsaken till detta är minskad tid för matematikundervisningen och en ökad heterogenitet i klassrummen.

3.2.2 FÖRSLAG

I början av kapitel 3 sammanfattade jag de analyser av matematikundervisningens villkor som finns i kapitel 1. De utgör tillsammans med det som finns i avsnitt 3.2.1 underlag för de förslag som jag nu ska framföra om hur matematikundervisningen bör läggas upp inom den högre tekniska utbildningen. Särskilt viktigt underlag utgör sammanfattningen på sid 198 - 200 av de enkäter och intervjuer jag genomfört. Förslagen framförs i form av 15 PRINCIPER. Dessa är inte heltäckande så att de kan uppfattas som ett helt program för matematikundervisningen utan inskränker sig till särskilt viktiga punkter.

Stoffinnehållet

Matematikbehoven i fortsättningen av utbildningen är mer näraliggande än yrkeskraven. De senare är mindre, mer diffusa och varierar starkt mellan individer. Enligt Dahllöf (1967) avser de i princip samma moment som kraven i den fortsatta utbildningen. Jag föreslår därför:

PRINCIP 1. Urvalet av moment att ingå i matematikkursen på en utbildningslinje bör i huvudsak ske utifrån behoven i resten av utbildningen.

Jag inkluderar då inte kurser i statistik och sannolikhetslära, optimeringslära och liknande. För sådana kurser är främst yrkeskraven avgörande.

Rent praktiskt föreslår jag följande procedur.

PRINCIP 2. De övriga ämnena i utbildningen analyseras avseende matematikbehov. De matematiska moment som bedöms som oundgängligen nödvändiga fastställs. Det "matematiskt-pedagogiska" höljet till dessa moment undervisas, dvs den matematikkurs som behöver studeras för att klara dessa moment.

Det kan tyckas som om detta vore mer eller mindre av en truism. Men lägger man tonvikten på oundgängligen nödvändiga framgår en psykologiskt viktig nyansering. Det torde nämligen vara ganska lätt för en linjenämnd - eller snarare en expertgrupp utvald av linjenämnden - att komma överens om en lista på oundgängligen nödvändiga moment. Jag har i övrigt i denna rapport samlat en rad fakta och genomfört resonemang som visar att redan för att man ska kunna klara att tillämpa matematik i relativt begränsad omfattning krävs ansenliga matematikkunskaper och mycket träning. Det kommer alltså enligt detta resonemang att fordras en omfattande matematikutbildning vid flertalet linjer för att nå redan det oundgängligen nödvändiga. Det kan möjligen bli litet svårare att övertyga linjenämnden om att anslå tillräckligt med tid till matematiken men genom målspecifikationen ser den att kursen inte innehåller någon "extravagans".

Sedan kursinnehållet fastlagts vidtar en mycket väsentlig informationsfas, varvid matematikutbildningen marknadsförs. Jag formulerar ytterligare en princip:

PRINCIP 3. Matematikkursen bör marknadsföras så väl att bl a alla lärare i andra ämnen vet vad den innehåller och vilken dess målsättning är.

När matematikkursen fixerats får lärarna i tillämpningsämnena en noggrann information om dess innehåll och uppläggning. De vet då vilken matematik de har att bygga på i sitt ämne. De kan tillse att så mycket som möjligt av den används och kan ställa krav på att teknologerna verkligen behärskar den. Detta vinner både undervisningen i matematik och i tillämpningsämnet på. Skulle någon önska införa stoff som kräver matematik utöver den fastställda kursen kan det presenteras på ett intuitivt sätt i anslutning till ämnets egen undervisning eller ges i specialkurser.

En sådan marknadsföring bör naturligtvis innefatta både teknologer och matematiklärarna själva. De senare måste vara väl medvetna om vilka mål kursen är avsedd att uppfylla, dels för uppläggningen av sin egen undervisning, dels för att hjälpa till att stärka teknologernas motivation genom att knyta an matematiken till tillämpningsämnena.

Matematiklärande - något av ett spännande äventyr

Det är angeläget att försöka göra matematikundervisningen vid teknisk fakultet mindre slentrianmässig och mer till något av ett spännande äventyr. Enligt mångas utsago - vilket har dokumenterats tidigare i denna rapport, i "Sju enkäter" och i studieavbrottsundersökningen - upplevs matematiken vid teknisk fakultet som ganska

isolerad. Den utgör vidare ett förberedande ämne med uppgift att ge förkunskaper till de tekniska ämnena, vilka teknologerna främst har kommit till högskolan för att studera. Många blir frustrerade när de i stället för tekniska ämnen får lov att arbeta med ren matematik med sjunkande motivation och sämre studieresultat som följd. Dessutom är matematiken tidskrävande och svår. Även om de flesta klart förstår matematikens roll och inser dess betydelse finns det mycket att vinna på att knyta an matematiken bättre till de tekniska ämnena.

En åtgärd som diskuterats ovan i samband med PRINCIP 3 är att informera teknologerna bättre om de principer som ligger bakom urvalet av momenten i kursen. En annan anges i PRINCIP 4:

PRINCIP 4. Under matematikundervisningen bör de moment från de matematikanvändande ämnena, som motiverat att de olika matematikmomenten medtagits, utnyttjas för att motivera teknologerna för matematikstudiet.

Naturligtvis kan även andra tillämpningsexempel tas med. Utnyttjandet som omtalas i PRINCIP 4 kan ske på många olika sätt, t ex i form av att läraren eller läroboken orienterar om användningen eller att teknologerna arbetar med den. I allmänhet får man inte ha för stora förhoppningar om effekten av sådana inslag på grund av de svårigheter som existerar när man undervisar om matematikens tillämpningar. Påvisandet av matematikens användbarhet måste ske på ett mer slagkraftigt sätt.

De stödåtgärder som vidtagits på KTH med anledning av den låga studieeffektiviteten har bl a inneburit att teknologerna sammanslagits i grupper om 20 - 30 personer. Dessa grupper har man sedan försökt hålla samman i alla ämnen i de första årskurserna och vidtagit olika åtgärder för att stärka samhörigheten. Erfarenheterna är goda och alla skäl talar för att man även i fortsättningen bör låta teknologerna arbeta i väl sammanhållna grupper. Detta leder fram till PRINCIP 5:

PRINCIP 5. Teknologerna bör arbeta i sammanhållna grupper. Varje grupp bör redan från början av sina studier ha någon eller några större uppgifter - miniprojekt - som de arbetar med under en längre tid och som innebär tillämpning av matematik.

Jämför referatet av försöksverksamheten i Loughborough på sid 195.

Sådana miniprojekt kan vara av mycket varierande slag. Man kan t ex tänka sig att gruppen består av cirka 25 teknologer och den får som uppgift matematikanvändning vid t ex diskontinuitetsproblem inom tekniken. Andra alternativ är att gruppen i de tillämpade ämnena särskilt uppmärksammar t ex användningen av integraler, differentialekvationer eller diskret matematik. Denna uppgift avses då färga deras matematikinlärning men inte på något sätt dominera den. Arbetat bör domineras av den matematik de behöver för de oundgängligen nödvändiga momenten. För att ett sådant arrangemang ska fungera måste det arbete som teknologerna

lägger ner på miniprojektet ge utdelning i form av tentamens-(studiemedels)poäng. Vidare ställs mycket stora krav på lärarna, bl a behövs en omfattande planering. En aktivare roll för lärarna är så viktig att jag formulerar den som en princip:

PRINCIP 6. Matematiklärarna bör ha en aktiv roll. Varje nytt år bör innebära något nytt, varvid läraren tillsammans med teknologgruppen ger matematikundervisningen det årets speciella profil genom att man ägnar särskild uppmärksamhet åt något område. Tillsammans bör de uppleva matematiken som en levande vetenskap att anpassa efter just deras behov och intresse.

Den tidigare diskuterade principen om återupptäckande har här relevans.

Den förnyelsetanke som anges i PRINCIP 6 är mycket viktig enligt min mening. Majoriteten teknologer upplever matematiken som något en gång för alla färdigt. Det är fixerat sedan länge vad man ska lära sig. Det är bara att sätta sig ned och plugga. Så småningom i studierna kommer man att få reda på vad varje enskilt moment ska användas till. Lärarna kommer att tala om när det är dags att använda momentet och på vilket sätt det ska användas. När det händer att denna tidpunkt aldrig inträffar blir man besviken och känner sig lurad.

Att många uppfattar matematiken på detta sätt har flera orsaker. Ett skäl är tidsbrist. Det kräver mer tid att lägga upp matematikundervisningen på det mer öppna sättet som föreslås i PRINCIPERNA 5 och 6. Teknologerna upplever ett tryck att lära sig det mest nödvändiga i fråga om räknefärdighet och matematisk metodkännedom. De vill klara tentamen i matematik. Lärarna dras med och hjälper själva till. De begränsar sin uppgift för att kunna nå åtminstone vissa påtagliga resultat på den tid som står till förfogande. Man hinner inte lyfta blicken för att nå högre mål utan nöjer sig med de mest näraliggande och pockande.

Ett annat skäl är lärarna. Deras undervisningsbörda är för stor för att tillåta ett omfattande planeringsarbete. Många gånger är det forskningen som lockar mera. Forskningsresultat ger meriter för befordran, vilket inte undervisningsinsatser gör. De saknar också förebilder för ett utvecklingsarbete. Den egna fantasin räcker ofta inte till.

Ett tredje skäl är att det är svårt att hitta den lämpliga avvägning som gör en sådan här satsning till en framgång. Det finns många misstag att göra som leder till fiasko.

En vitalisering av matematiklärarens roll är inte lätt att åstadkomma. Det är en lång process, varvid man successivt får de involverade att ändra sin inställning och vara beredda att göra de uppoffringar som krävs på vägen mot ett gott resultat och ett mer tillfredsställande arbete.

En matematikundervisning enligt PRINCIPERNA 5 och 6 leder automatiskt till en bättre samverkan mellan matematiker och tillämpare. En sådan samverkan är så viktig att den förtjänar en egen princip:

PRINCIP 7. En nära samverkan mellan undervisningen i matematik och i andra ämnen bör etableras.

Samverkan av detta slag är svår. Att både hålla på sitt ämnes egenart (se vidare PRINCIP 10) och samtidigt underordna sig andra ämnens krav är en svår uppgift som kräver tid, tålamod, goda avsikter och mycket förnuft. Jag ska inte här komma med förslag till hur denna samverkan ska etableras och stärkas. Det finns många vägar att gå. Utbildningsplanerare - studierektorer och andra typer av administrativa befattningshavare - har här en viktig roll att fylla. Samverkan kostar pengar - i form av tid för lärarna och tillgång till särskilda planerare - och detta pris får man vara beredd att betala.

Samordningen kan stärkas genom att vissa matematikmoment integreras i andra ämnen och genom lärarbyte mellan matematik och andra ämnen. Överhuvudtaget är mycket att vinna på om lärare i andra ämnen engagerar sig i matematikundervisningen. Seminarier gemensamma för lärare i matematik och tillämpningsämnen kan anordnas.

PRINCIP 8. Lärare i ämnen som använder matematik bör involveras mer i matematikundervisningen, t ex som utbyteslärare och som tillfälliga lärare i miniprojekten.

En samordning och integration som är särskilt angelägen avser programmering och numeriska metoder. De bör kunna ge utmärkt stoff åt miniprojekten.

PRINCIP 9. Undervisningen i matematik, programmering och numeriska metoder bör nära samordnas och delvis integreras.

De numeriska metoderna kan ofta fungera som en bro från matematiken till de tekniska ämnena, något som är viktigt att tillvarata inte minst för teknologernas motivation. Även användningen av räknedosor, särskilt de programmerbara, är en viktig förbindelselänk som bör utnyttjas.

Matematik - ett ämne med egenvärde

Det understryks ofta att matematikens roll vid den högre tekniska utbildningen är en tjänande. Yrkesanvändningen av matematik anses då oväsentlig. Matematikundervisningen ska ge det som teknologerna behöver kunna för att klara matematiken i de andra ämnena och göra detta på smärtfriast och effektivast tänkbara sätt. Som framgår av det föregående delar jag den uppfattningen att matematiken ska inriktas på att ge de förkunskaper som de andra ämnena behöver. Inte desto mindre tror jag man tjänar på att låta matematiken få ett egenvärde på flertalet utbildningslinjer. Med egenvärde menar jag då inte att matematiken ska ha en egen målsättning och ge det som matematiker skulle bedöma som önskvärt. Målet ska vara att ge den matematik som tekniker bedömer som nödvändig men den ska utgöra en samlad kurs och inte vara isolerade bitar. Jag tar alltså avstånd från en integrering av matematikkursen och detta av flera skäl:

- Matematiken är ett stort ämne som kräver mycket tid. Att integrera det i andra ämnen skulle förrycka dessa.

- En styrka hos matematiken är att den är användbar i så många olika sammanhang. Fullt flexibel blir den bara om teknologerna tillägnar sig de matematiska begreppen och metoderna i sin allmänna form. Lär de sig den i samband med speciella tillämpningar kommer de att få stora svårigheter att använda den i andra sammanhang.

- Det kräver erfarenhet och stor skicklighet att undervisa i matematik. Det är en fördel om lärare kan specialisera sig på denna konst.

- Psykologiskt betyder det mycket för både lärare och teknologer om ett ämne är erkänt och har ett egenvärde. Känner teknologerna sig litet som matematiker kan denna kompetens betyda att de med större självtillit griper sig an att tillämpa sina kunskaper. De kanske då i högre grad använder dem i nya situationer på ett fruktbart sätt och inte bara "där det är meningen", dvs för det ändamål man lärde sig just det matematikmomentet.

Detta resonemang leder till PRINCIP 10:

PRINCIP 10. På flertalet utbildningslinjer bör teknologerna få en självständig kompetens i sådan matematik, som de kan tillämpa i tekniska sammanhang.

Den sista bisatsen är inte minst viktig. Det är föga meningsfullt att ge teknologer en matematikkompetens som de inte har behov av eller som de inte förmår tillämpa. Det betyder bl a att matematikkursen inte får vara för stor (PRINCIPERNA 1 och 2) och att lärarna i de andra ämnena är väl insatta i vad kursen omfattar (PRINCIP 3). I själva verket krävs en rad olika marknadsföringsåtgärder från matematikens sida.

Lärare i andra ämnen bör kontinuerligt "fortbildas" angående hur matematiken utvecklas och vilka kunskaper teknologerna får. De får detta automatiskt genom att de deltar i miniprojekt och liknande aktiviteter men även en specialinriktad seminarieverksamhet kan vara behövlig.

Teknologerna bör också kunna fungera som marknadsförare. Om ansträngning läggs ned på att göra dem delaktiga i beslutsprocessen om vad matematikundervisningen ska innehålla bör de kunna föra detta vidare när de kommer till ämnen där matematik används. Om arbetssättet vid högre teknisk utbildning successivt utvecklas till att bli mer öppet, där varje inslag inte har sin predestinerade roll utan finns med för att det passar in i ett sammanhang som är aktuellt för just den årgången, blir teknologernas egen roll som bedömare av sina kunskapers inriktning och omfattning allt viktigare. De blir då i högre grad marknadsförare av vad de lärt sig i de grundläggande ämnena. Det är emellertid en lång väg att gå innan vi nått därhän.

Jag går nu över till en annan delaspekt nämligen hur abstrakt-teoretisk matematiken bör vara. Behövs t ex bevis?

PRINCIP 11 (lagom-principen). Abstraktionsgraden av matematikundervisningen bör vara noga avvägd och anpassad till elevgruppens behov.

Jag hänvisar till de synpunkter som framfördes på sid 77 - 82. Att åstadkomma den noggranna avvägning som omtalas i PRINCIP 11 är en mycket delikat uppgift där lärarens förmåga verkligen prövas. God elevkontakt är mycket viktigt. Val av läromedel är en central faktor i detta hänseende. Traditionen spelar en stor roll och läraren har en viktig uppgift att föra den vidare och anpassa den till ändrade krav. Lärarens roll - både som planerare och vid elevkontakterna - har karaktären av kvalificerat hantverksarbete, som svårligen låter sig industrialiseras och rationaliseras.

PRINCIP 12. Man bör sträva efter att hitta former för kunskapskontrollen, som är förenliga med målet för matematikundervisningen.

Denna princip, som förefaller truistisk, får sin betydelse i det läge då man börjar omstrukturera matematiken och t ex försöker ge teknologerna ett sådant matematiskt kunnande att de kan tillämpa matematik. Vidare måste man hitta former för att avrapportera miniprojekten. Kanske bör man också testa teknologernas förmåga att ge längre skriftliga beskrivningar med matematik (tekniska rapporter).

PRINCIP 13. Matematikundervisningen bör ta fasta på den yrkesverksamme ingenjörens behov av kunskaper i överslagsräkning och av logisk förmåga.

Dessa behov, som bl a dokumenterats genom min enkät till yrkesverksamma ingenjörer, betyder inte att man ska ge en större kurs i matematisk logik eller drilla överslagsräkning. Det som behövs är en förmåga att resonera logiskt korrekt utan användning av formell logik; man kan kalla det en intuitiv logisk förmåga. Matematikundervisningen ger många tillfällen till detta och frånvaron av "brus" gör det särskilt lämpligt att träna logiska resonemang just i matematik. Man bör därför ge sig tid att då och då använda logiskt-deduktiva kedjor och göra genomgående och systematiska behandlingar av olika problemkomplex.

Förmåga i överslagsräkning grundläggs genom att man skaffar sig fördjupade kunskaper inom ett område. Har man endast ytliga kunskaper är man tvungen att noga hålla sig till regler och lagar och formellt tillämpa dem. När kunskaperna successivt fördjupas börjar man inse vilka lagar som är de väsentliga i en given situation och vilka som är mer perifera och som man kan bortse ifrån. På detta sätt växer överslagsräknandet fram.

Differentiering

De tekniska högskolorna får numera motta studerande med mer varierande kunskaper än förr. Generellt har de arbetat väsentligt mindre med matematik än tidigare. Många har stora svårigheter

att klara matematiken och andra grundläggande ämnen medan andra klarar dem fint. Mycket talar för en differentiering av utbildningen. En sådan har också rekommenterats av MATEK och RESULTATGRUPPEN. I samband med satsningen på särskilda stödåtgärder har differentiering endast praktiserats i mindre utsträckning, främst genom att teknologer rekommenderats att följa en treårig studiegång för att klara de båda första årskurserna.

Vad gäller differentiering är olika modeller tänkbara:

A Gemensamt mål för alla - gemensam undervisning för alla

B Gemensamt mål för alla - olika undervisning

C Olika mål - gemensam undervisning för alla

D Olika mål - olika undervisning

Typ A innebär ingen differentiering alls medan typ D är den mest långtgående differentieringen. Den traditionella uppläggningen av högre teknisk utbildning kännetecknas av en mycket svag differentiering. Den skulle närmast vara att karakterisera som typ A. Den svaga differentiering som förekommer är av typ D. Målen kan väljas olika i så måtto att man kan sikta på överbetyg eller slätstrukna betyg. Det finns också olika specialiseringar inom högre årskurser på varje linje, som i realiteten innebär en måldifferentiering. Undervisningen är olika i så måtto att man kan låta bli att delta i vissa undervisningsmoment, t ex föreläsningar eller att läsa momenten i olika takt. En sådan svag differentiering förekommer vid nästan all utbildning.

Tar man med andra typer av teknisk utbildning i diskussionen kan man jämföra teknisk gymnasieutbildning och teknisk högskoleutbildning. Mellan dessa finns en stark differentiering både vad gäller mål och undervisning. Uppenbarligen innebär denna differentiering ett för stort steg. Många önskar en mellanform. Denna kan erhållas genom en påbyggnad av den tekniska gymnasielinjen, t ex i form av en varvad 1-2-årig utbildning. Resultatgruppen föreslog den alternativa formen med en tvåårig utbildning vid teknisk fakultet. En nackdel med denna är att den ligger vad gäller utbildningens längd så nära den fyraåriga tekniska gymnasieutbildningen.

I denna rapport ska jag inskränka mig till att diskutera differentieringar inom den fyraåriga högre tekniska utbildningen. Vilken typ av differentiering är önskvärd? Är det B, C eller D? Att läsa de två första åren på tre år är en differentiering av typ B. Denna differentieringsåtgärd har inte blivit särskilt framgångsrik. Relativt få elever har varit beredda att redan från början kalkylera in ett extra studieår. Man brukar kalla sådana skäl psykologiska. Och jag tror att det just är psykologiska skäl som talar emot en differentiering av typ B när det gäller högre utbildning. Personer som behöver väsentligt olika tid att tillägna sig grundläggande matematiskt-naturvetenskapligt tekniska ämnen kan knappast anses nå samma mål vad gäller hela utbildningen. En person med god matematisk förmåga kan sannolikt också tillämpa matematiken på ett sätt som gör honom lämplig för tekniska uppgifter av annat slag än en person utan denna förmåga. Därför bör han/hon också ha en annan typ av undervisning i de tekniska ämnena, dvs ett annat mål för sin högre tekniska utbildning.

Inte heller en starkare differentiering av typ C, dvs olika mål - samma undervisning, tror jag är tänkbar. Som undervisningen i de lägre årskurserna nu är upplagd passar den dåligt för teknologer med svaga förkunskaper från gymnasiet. De lyckas ofta inte klara tentamina i de grundläggande ämnena, varför förutsättningarna att klara resten av utbildningen undanrycks.

Återstår då en differentiering av typ D, dvs olika mål - olika undervisning. Även den är svår att genomföra, då den dels stöter på ett psykologiskt motstånd dels är förknippad med många praktiska svårigheter. Differentieringsformen måste vara bra för de lågpresterande samtidigt som de är beredda att acceptera den. Jag tror emellertid det finns möjlighet att använda en differentiering enligt typ D.

Matematikinlärandet för teknologer med dåliga förkunskaper och dålig förmåga i matematik måste i stor usträckning baseras på skruvinlärande. Se sid 38. Teknologerna måste därvid utsättas för en kraftig dos matematik, som får dem att arbeta på ett nyanserat sätt. I början får det vara mycket gymnasiematematik som de samtidigt tillämpar - eller åtminstone använder - i några andra ämnen. Enligt min hypotes på sid 69 är man inte kapabel att tillämpa matematik som man just har lärt sig utan bara matematik som man har smält ordentligt. Därför måste stor omsorg läggas ned på att välja ut enkla tillämpningsuppgifter. Hela tiden bör man sträva efter att stärka teknologernas självförtroende. Man får inte ha för bråttom med krav på kvalificerade kunskaper men se till att en fond av baskunskaper byggs upp. Det är nu dags att formulera ytterligare en princip:

PRINCIP 14. Teknologerna bör redan från början utsättas för ett matematikprogram, som får dem att arbeta effektivt. Inledningsvis är det viktigast att befästa gymnasiekunskaperna och lära sig tillämpa dem i andra ämnen.

För motivationens skull bör teknologerna redan från början arbeta med ingenjörsmässiga inslag. Miniprojekten är redan diskuterade. Därutöver bör ett nära samarbete äga rum mellan matematikundervisningen och övriga ämnen i första årskursen som använder matematik. Det gäller att se till att teknologerna har de behövliga matematiska förkunskaperna och ibland att modifiera krav i jämförelse med hittillsvarande praxis.

Ett matematikprogram enligt PRINCIP 14 måste vara starkt individanpassat. Ett viktigt inslag är diagnostiseringen. Varje teknolog måste ges goda tillfällen till att mäta och följa hur hans/hennes kunskaper och färdigheter växer till. Den enstaka teknologens behov av undervisning kan kanske sedan regleras med hjälp av räknestugor eller liknande mer flexibla inslag. Eventuellt behövs olika timtal även i den grundläggande undervisningen. Lektionsundervisning är att föredra som undervisningsform.

Man kan överväga en stark målinriktning av inlärandet. Teknologen arbetar då intensivt ett moment och ger sig inte förrän han/hon behärskar det, vilket mäts genom test, dvs en sorts "mastery learning". Nackdelen med denna form kan vara att det mer långsiktiga försummas. Inlärandet sker nämligen hela tiden på två nivåer. Se sid 37. Dels

skaffar man sig en kärna av baskunskaper dels skaffar man sig en sorts bredare kunskap av orienteringskaraktär, som bl a fyller syftet att ge perspektiv åt baskunskaperna. Det är angeläget att hitta testformer som gör att en teknolog kan följa hur båda formerna av kunnande växer till.

Vad gör nu de högpresterande teknologerna medan mindre lyckligt lottade kamrater arbetar med luckor i sina baskunskaper? Ett problem är att man inte i förväg vet vilka som är lågpresterande. Försöken att välja ut några grupper med teknologer med goda gymnasiebetyg och låta dessa grupper gå snabbare fram genom kursen har inte varit succéer. Inte heller har det hjälpt att låta teknologerna välja grupp själva. Sådana elitgrupper har visserligen i medeltal lyckats bättre än normalgrupper men inte i proportion till deras överlägsna meriter och förkunskaper. Det förefaller t ex att finnas ett mönster av att i varje grupp några tenderar att halka efter. Studieavbrottsundersökningen visade också att det inte gick att hitta tillräckligt goda kriterier att särskilja dem som skulle lyckas respektive misslyckas så att dessa kriterier kan användas i praktiken. Differentieringen får ske successivt efter teknologens eget val. Följande modell rekommenderas.

Efter någon månad på höstterminen startar några extrakurser i matematik. Teknologer som lyckats bra från början, som tror på sin förmåga och som är beredda att göra en något större arbetsinsats, anmäler sig till sådana kurser. Stoffet i kurserna väljs så att det inte omedelbart krävs för det fortsatta studiet i matematik och andra ämnen. Det fordras kanske bara för vissa specialiseringar i de högre årskurserna. Väljer man stoff som alla behöver måste kursen återkomma under andra och tredje terminen. Dessa kurser bör vara mer systematiskt-matematiskt upplagda. De kan också vara klart målinriktade. Jag sammanfattar i en princip:

PRINCIP 15. Matematikundervisningen differentieras tidigt genom extra kurser, som vissa teknologer förbigår eller läser senare under studiegången.

En sådan differentiering har utsikt att accepteras av alla. Den ger förutsättningar att på alla utbildningslinjer utbilda en kader av ingenjörer med god förmåga att tillämpa matematik parallellt med andra som bara lär sig så mycket matematik att de klarar de naturvetenskapliga och tekniska ämnena. Matematiktentamen för den senare kategorin får begränsas till en baskurs men då också pröva vederbörandes förmåga att tillämpa den.

Hur stora förbättringar kan uppnås?

Som framgått av det föregående är jag inte särskilt optimistisk om att stora förbättringar av matematikundervisningen kan uppnås. Men marginella förbättringar kan man säkert få och därvid tror jag framför allt på följande åtgärder.

- Man accepterar att många elever inte vill ha eller kan tillgodogöra sig en teoretiskt-systematisk matematikundervisning utan undervisar dem med skruvmetoden, dvs låter dem närmast "uppleva matematiken" och vänja sig vid den. Detta kräver lång undervisningstid.

- Man likaledes accepterar att det behövs goda matematikkunskaper för att kunna tillämpa matematik framgångsrikt. Undervisningen behöver tillrättaläggas från denna utgångspunkt.

- Man differentierar matematikundervisningen och ger endast dem med ett mer utpräglat intresse en större logisk-systematisk matematikkurs.

- Matematiklärarna aktiveras så att de kan göra varje grupps matematikinlärande till något av ett unikt äventyr.

Summary in English

Background

Mathematics teaching as it is today is the result of an empirical process which lasts over centuries. The scientific knowledge of what characterizes and directs this process is scarce. Teachers have, however, gathered a lot of wisdom about how to teach mathematics. My report takes this fact as a starting point and its purpose is to increase the understanding of mathematics teaching as an empirical process.

I have chosen to study the mathematics teaching of persons who have great use for mathematics in their education and in work. I have followed and discussed their learning of mathematics from when they begin school at the age of seven until they are at the university and I have also tried to get a glimpse of what mathematics they use in their professional life. The practical data collected refer to the School of Mechanical Engineering at the Institute of Technology in Stockholm.

Main results

Using newspaper headlines the main results could be summarized in the following manner.

FOR MOST SWEDES "MATHEMATICS FOR GENERAL USE" IS ENOUGH

EXPERIENTIAL LEARNING IS MORE COMMON THAN BELIEVED

POTENTIAL - A NEW MEASURE OF KNOWLEDGE OF MATHEMATICS

MANY PEOPLE NEVER LEARN TO APPLY MATHEMATICS

EXERCISES WILL BE AN IMPORTANT PART OF MATHEMATICS LEARNING ALSO HENCEFORTH

DIAGNOSTIC TESTING OVERESTIMATED

MATHEMATICAL MODEL - A DIFFICULT IDEA

COMPROMISE NECESSARY AS TO LEVEL OF ABSTRACTION

LESS HOMEWORK THAN BEFORE

SWEDISH MATHEMATICS TODAY: LESS TIME - LESS ABLE STUDENTS

INSUFFICIENT SKILL IN CALCULATION TODAY IN SWEDEN

THE STORY OF THE "NEW MATH" REVEALED

THE MOST POWERFUL MEN IN SCHOOL MATHEMATICS REVEALED

THE MATHEMATICS IN HIGHER TECHNICAL EDUCATION NOT TOO DIFFICULT BUT THE TEACHING NEEDS ACTIVATION

SUBDIVISION OF THE TIME FOR SCHOOL MATHEMATICS MAKES GRADING UNNECESSARY

WHAT WE KNOW ABOUT MATHEMATICS TEACHING IN HIGHER TECHNICAL EDUCATION

The report

The main parts of the report are as follows.

- o An attempt to illuminate central ideas in the teaching of mathematics by formulating certain "theory fragments"
- o An analysis of the development of school mathematics in Sweden during the last twenty years
- o An analysis of mathematics teaching at an institute of technology
- o A suggestion concerning the future teaching of mathematics in Sweden

The data collection analysed in this report is included in an earlier report "Sju enkäter om matematikundervisning" (Seven questionnaires about mathematics teaching), Rapport TRITA-EDU-015, The Royal Institute of Technology in Stockholm 1977.

The parts of the report of international interest are briefly summarized below.

Goals for mathematics teaching

Different taxonomies used for mathematics are discussed. In the report the following subgoals are used.

A Skill in calculation

B Concept understanding

C Knowledge of methods

D Problem solving

E Application

Each of these subgoals could be subdivided in levels so that one has to achieve the same level in all subgoals before one can reach a higher level in any subgoal.

Different types of knowledge and learning

I distinguish between two types of knowledge needed if a person should

A use mathematics when it is completely evident that mathematics and also what sort of mathematics should be used

or

B take initiatives of mathematical nature when it is neither evident that mathematics should be used nor what sort of mathematics.

It is more difficult to train people to get the B-type knowledge. The effective component is then more important.

I also distinguish between primary knowledge and secondary knowledge. The first type is characterized by the fact that the person is certain that he has the knowledge in question. Secondary knowledge is not of much use in application of mathematics but is necessary as a step to primary knowledge. Furthermore secondary knowledge in a larger discipline is necessary for primary knowledge in a subdiscipline.

Finally I distinguish between two types of learning called α-learning and β-learning. The first type is close to the idea of experiential learning - "the way life teaches you". It is a slow but effective form of learning when repetition, feed-back and environmental influence are dominant.

β-learning is more systematical, verbal and built on understanding. I analyse different principles of teaching as to their reliance on either type of learning. School mathematics depends heavily on β-learning which probably is unavoidable.

The potential

The two most important frame factors for learning of mathematics is the time available and the students' ability to learn. In this connection I have introduced a macro model in order to compare the frame factors in different conditions.

Research evidence points to the fact, that pupils have strongest influence on the level of teaching in a class when their mathematical ability lies around the lowest quartile. I have therefore taken the mathematical ability of those pupils as a measure of the level of the teaching. The mathematical ability in an undifferentiated group of people is then assumed to be normally distributed. By tracing back the grades from primary school for the pupils requiring a certain type of training comparisons can be made. The concept of potential of mathematical training can be defined as the sum of the time devoted to mathematical learning and each time being multiplied by a factor which is proportional to the level (= mathematical ability of pupils around the lower quartile) of the pupils participating in the training. I consider the potential a good measure of the possibilities open for a student participating in a mathematics course.

The potential is calculated in the report comparing mathematics learning in Swedish schools in the 1950's and 1970's. For students entering the School for Mechanical Engineering in the 1950's the mean time devoted to studying mathematics in school was 2 000 hours

(of 60 minutes). In the 1970's the time had decreased to 1 400 hours. The potential had dropped from 3 100 to 1 900 hours during the same time. This fact may be an important explanation for the decreasing skills in mathematics reported nowadays as compared with the situation 20 years ago.

Some important aspects about mathematics teaching

The concept of mathematical model is essential in an analysis of application of mathematics. The concept is, however, difficult to grasp in its full flavour which increases the difficulties in teaching applications. It seems that many persons never learn how to apply mathematics and that they are only capable of learning mathematics in its applied form.

Mathematics teaching consists to a large extent of work with exercises. This seems to especially characterize the situation in Sweden in all stages. This has as a consequence that the subgoals (skill in calculation, knowledge of methods and elementary concept understanding) dominate at the expense of qualified concept understanding, problem solving and application.

Diagnostic testing is used much more today than before which has had many desirable effects. It appears to be somewhat overestimated for reasons discussed in the report, mainly because of the difficulties to arrange follow-up activities.

What has happened to school mathematics in Sweden?

During the last decades the school system in Sweden has been drastically reorganized. Mathematics has been heavily involved: examinations are abolished, the grading system is changed, failure of a grade does not exist any more, hardly any pupil is obliged to repeat a school year for deficits in mathematics, more people study mathematics for a longer time span, the time devoted to mathematics has decreased, especially the homework, etc. (see above about Potential).

The course content in grades 1 - 9 has changed primarily in the following respects.

- Less complexity of the numerical calculations
- Less calculation with vulgar fractions
- More approximate calculations
- More work with diagrams, tables and statistics
- Less problem solving
- Geometry has changed character

The working methods in grades 7 - 12 have changed and much more time is now devoted to individual work in the classroom with the teacher walking around helping the pupils one by one.

The results in grades 1 - 6 are roughly the same but in grades 7 - 12 a considerable declination in knowledge of mathematics is reported. In general, the outcome of the mathematics teaching cannot be estimated to match the input in resources and manpower. The teaching in school for the more gifted pupils has been disturbed by the many reforms.

The development of the teaching of mathematics is slow. Tradition is the most important factor of power. In the report I study the influence of three groups: school politicians, teachers and consumers.

The school politicians have had a great influence. Their dominant groups have worked for a remodelling of the school since the 1950's. They were in favour of the movement "New Math" and helped to introduce it in Sweden. The New Math seemed to promise everything that the school politicians hoped for. If it should become a success much would be gained and if not the school politicians had something to put the blame on. The New Math was partly a failure and today the dominating school politicians have a new favourite: basic skills.

The Swedish teachers have not been prompters in the reform movement. The reforms have come from outside the school, which has been a serious drawback. The teachers have protested mildly but accepted the heavy burden to try to implement the reforms. The reforms have led to success only when the teachers have been willing to accept the new ideas and been able to carry them through. In this respect they, collectively, are a very influential power factor. In comparison groups of experts such as consultants, supervisors, teachers in schools of education, textbook authors, researchers with executive power can achieve rather little in the long run.

Mathematics training for future engineers

It is not possible from theoretical viewpoints to fix accurately of what the mathematics training for future engineers should consist. The context is too complicated. Under these circumstances it is advisable to pay careful attention to the empirical process which has led to the present situation.

In order to reach a certain depth I have made a study of the role of mathematics in one special branch of the higher technical education, namely the School of Mechanical Engineering at the Institute of Technology in Stockholm. I have put much effort into trying to penetrate and analyse the experiences of students, teachers of mathematics and subjects which apply mathematics and engineers at work.

The following conclusions can be drawn.

- Mathematics is an undisputed ingredient in the training.
- A firm knowledge of school mathematics and orientation about university mathematics is a necessity.
- It is in general enough with a rather standardized knowledge. Creative applications are for a privileged minority.

- It is important to train students to carry through logical reasoning.

- The present extent of mathematics training is satisfactory. The coordination between the mathematics teaching and how mathematics is applied in other subjects is far from satisfying. The teachers in the other subjects do not use but little of the mathematics that the students have learned. The applications are usually very stereotype and the students are hardly at all trained to apply mathematics in situations new to them.

- The theoretical level of mathematics is modest and in general satisfactory to all involved.

- Solving of rather stereotype exercises dominate the teaching and learning. Some consider this to make the mathematics teaching too poor.

- Mathematics is considered a difficult subject. A not negliable minority give up the studies because of difficulties with mathematics and applications of mathematics. The general opinion is, however, that the level is just about right. To make mathematics easier would only move the difficulties to other subjects.

Mathematics teaching tomorrow

I conclude the report by giving some suggestions about future alternatives for the teaching.

School mathematics should be more differentiated. The first three quarters of each school year should be devoted to the "basic course". The last fourth is used for revision for those with insufficient basic knowledge and for applications and study for enrichment. Every effort should be undertaken to make everyone willing to learn the basics but no grading, especially no failure grades, should exist. The pupils should receive documents showing which extra knowledge they have attained.

The mathematics in the higher technical education should be defined out of the demands of other subjects but mathematics should retain its position as a separate subject. The mathematics teaching should preferably be given in small groups and from the very beginning be something of an adventure, each group not following exactly the same path as any other group. The mathematics teacher should play a more active role and work in close co-operation with teachers of the other subjects. These teachers should to a certain extent be involved in the mathematics teaching. The teaching of mathematics, of programming and of numerical methods should be integrated. The examination system must be revised to compel to a high goal of mathematics. The students should meet applications early especially open ended ones. The mathematics teaching should be differentiated from the beginning with early optional courses.

Referenser

Abrahamsson, B., Utbildning och samhälle: Några problemområden i skolan som arbetsplats. Utbildningsdepartementet 1974:1. Stockholm 1974.

Ahlin, L., Nordiska undersökningar om arbetsbördan hos skolelever i åldern 15-20 år. Göteborg: Göteborgs universitet, pedagogiska institutionen. 1968.

Ahlin, L., Hemarbetets funktion och struktur på gymnasienivå. Kompass-projektet, nr 52. Göteborg: Göteborgs universitet, pedagogiska institutionen 1973.

Ahlström, K-G., Utvärdering och aktuella problem. I: Malmberg, Forskning och utvecklingsarbete i moderna språk. Stockholm: SÖ 1977.

d'Ambrosio, U., Overall goals and objectives for mathematical education. Konferensdokument. Karlsruhe 1976.

Anderson, L.W., Time and School Learning. Chicago: University of Chicago 1973.

Angsmark, G., Studieresultat i gymnasiet. I: Specialutredningar om gymnasiet. SOU 1963:41. Stockholm 1963.

Bagge, G., Skolans betygssättning. SOU 1945:9. Stockholm 1945.

Bajpai, A., m fl, Mathematical education for engineers. Part 1 and 2. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. No. 6, p. 361, No. 7, p. 349. Loughborough 1976.

Begle, E., Evaluation of Mathematics Programme. I: Mathematics Education. The 69:th yearbook of NSSE. Chicago: University of Chicago Press 1970.

Bennett, N., Teaching Styles and Pupil Progress. Open books. London 1976.

Berglund, G., Mental Growth. Studia Scientiae Paedagogicae Upsaliensa. Uppsala 1965.

Berliner, D., Allocated Time, Engaged Time and Academic Learning Time in Elementary School Mathematics Instruction. Tucson: University of Arizona 1978.

Bloom,B.S., Taxonomy of educational objectives. Cognitive domain. New York: David Mac Kay Co 1964.

Bloom, B.S., Mastery learning. I: Block, Mastery learning. New York: Holt, Rinehart and Winston 1971.

Boalt, G., & Husén, T., Skolans sociologi. Stockholm: A & W 1964.

Boström, B., Nya metoder för poängsättning av flervalsprov. (Stencil) Uppsala: Uppsala universitet, pedagogiska institutionen. 1971.

Bruner, J.S., The Process of Education. New York: Vintage Books, Random House 1960.

Buckley, W., Sociology and Modern Systems Theory. New Jersey: Prentice-Hall 1967.

Callewaert m fl, Skolklassen som socialt system. Lund: Lunds universitet, pedagogiska och sociologiska institutionen. 1972.

Cambridge-rapporten: Goals for School Mathematics. The report from the Cambridge Conference on School Mathematics. Boston: Houghton Mifflin Company 1963.

Carleson, L., Matematik för vår tid. Stockholm: Prisma 1968.

Carroll, J.B., A model of school learning. Teachers College Record, 64. 1963.

Carroll, J.B., Problems of measurement related to the concept of learning for mastery. I: Block, Mastery learning. New York: Holt, Rinehart and Winston 1971.

Christoffersson, N.O., The economics of time in learning. Special Topic Bulletin from Department of Educational and Psychological Research, No. 34. Malmö: Lärarhögskolan 1971.

Churchman, W., Systemanalys. Stockholm: Rabén & Sjögren 1973.

Coleman, J., Differences between Experiential and Classroom Teaching. I: Keeton, Experiential Learning. San Francisco: Jossey-Bass Publisher 1976.

Committee on Assessing the Progress in Education, Objectives for National Assessment. Cape Newsletter II. No. 4 (1969), 6.

Dahllöf, U, Kursplaneundersökningar i matematik och modersmålet. SOU 1960:15. Stockholm 1960.

Dahllöf, U., Kraven på gymnasiet. SOU 1963:22. Stockholm 1963.

Dahllöf, U., Skoldifferentiering och undervisningsförlopp. Stockholm: A & W 1967.

Dahllöf, U., & Håstad, M., Matematik och ingenjörer. Nordiska utredningar 1967:10. Stockholm 1967.

Dahllöf, U., Elevgruppering och undervisning i svenska. Rapporter, Nr 44. Göteborg: Göteborgs universitet, pedagogiska institutionen 1970.

Dahllöf, U., Svensk utbildningsplanering under 25 år. Lund: Studentlitteratur 1971.

Dandenell, A., Stödåtgärder vid M, T, V och B 1974/75. Delrapport 2. Stockholm: Centrum för pedagogisk utveckling vid KTH informerar. 1976:11. 1976.

Dahr, E., Lärjungeurvalet till studielinjer med den nuvarande realskolans mål. SOU 1945:44. Stockholm 1945.

Dienes, Z.P., & Jeeves, M.A., Thinking in structures. London: Hutchinson Educational 1965.

Ericsson, G., Elevsammansättningen i gymnasiets och fackskolans årskurs 1. Göteborg: Göteborgs universitet, pedagogiska institutionen 1967.

Franzén, S., Hastighetsindividualisering. En teoretisk diskussion samt en presentation av en analysmodell. Forskningsrapport från MAP-gruppen 1975:2. Göteborg: Göteborgs universitet, pedagogiska institutionen 1975.

Freudenthal, H., Mathematics as an Educational Task. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company 1973.

Furth, H., Piaget för lärare. Stockholm: Liber 1977.

Glaser, R., Pshychology and Instructional Technology. I: Training Research and Education. (Red. Glaser, R.) University of Pittsburgh Press 1962.

Gymnasieutredningen. Ett nytt gymnasium. SOU 1963:42. Stockholm 1963.

Gårding, L., IMU och Marviken. Forskning om utbildning 4. 1974.

Hamrin, B., & Månsson, U., Det lönsamma läsandet. Stockholm: Wahlström & Widstrand 1976.

Holmberg, I., Effects of some trials to improve mathematics teaching. Studia psychologica et paedagogica 2:26. Lund 1975.

Hilding, S., Gymnasieinspektörrapport. (Stencil) Stockholm: SÖ 1977.

Husén, T., International study of Achievement in Mathematics. Stockholm: A & W 1967.

Håstad, M., & Thörnqvist, S., 70-talets teknolog möter 60-talets studentuppgifter i matematik. Stockholm: Pedagogisk utveckling vid KTH. TRITA-EDU-003. 1973.

Håstad, M., IMU - en nyttig läxa. Forskning om utbildning 4, 1974.

Håstad, M., Högberg, A., & Johansson, L., Studieavbrott vid teknisk fakultet. Del 1: UKÄ-rapport 1974:32. Del 2: UKÄ-rapport 1975:18. Del 3: UHÄ-rapport 1977:9. Stockholm.

Håstad, M., M och Matematiken. Stockholm: Centrum för pedagogisk utveckling vid KTH informerar. 1977:14.

Håstad, M., Sju enkäter om matematikundervisning. Stockholm: Pedagogisk utveckling vid KTH. TRITA-EDU-015. 1977.

Håstad, M., Teknologer skattar hur många poäng de får på tentamensuppgifter. Stockholm: Centrum för pedagogisk utveckling vid KTH informerar. 1978:26.

Kihlborn, W., Individualiserad matematikundervisning. Forskning om utbildning 3, 1974.

Kihlborn, W., Elevernas arbetsmiljö. PUMP-projektet 12. Göteborg: Göteborgs universitet, pedagogiska institutionen 1976.

Kihlborn, W., m fl, Läromedlens uppbyggnad. Göteborg: Göteborgs universitet, pedagogiska institutionen 1977.

Kline, M., Why Johnny can't add. New York: St Martins press 1973.

Kungl Maj:t, Proposition nr 171 till riksdagen angående reformering av de gymnasiala skolorna m m. Stockholm 1964.

Kungl Maj:t, Proposition 1968:129. Stockholm 1968.

Larsson, I., En beskrivning av elevers arbete med IMU-materialet. Version 3 i årskurserna 7-8. Pedagogisk-psykologiska problem. Nr 190.Malmö: Lärarhögskolan 1972.

Larsson, I., Individualiserad matematikundervisning; en bok om IMU-projektet. Pedagogisk orientering och debatt 43. Malmö: Hermods 1973.

Larsson, I., Individualized Mathematics Teaching. Studia Psychologica et Paedagogica. Malmö 1973.

Lord-Novich, Statistical theories of Mental Test Scores. New York: Addison-Wesley publishing company 1968.

Lundgren, U., Frame factors and the teaching process. Stockholm: A & W 1972.

Lundgren, U., Model Analysis of Pedagogical Processes. Lund: Gleerup 1977.

Lärarnas Riksförbund, En skola att trivas i. Stockholm 1968.

Magne, O., Samhället och matematiken - Har vi en ny kris i matematikundervisningen? Pedagogisk-psykologiska problem. Nr 281. Malmö: Lärarhögskolan 1975.

Marton-Dahlgren-Svensson-Säljö, Inlärning och omvärldsuppfattning. Stockholm: A & W / Gebers 1977.

MATEK, Den grundläggande utbildningen i matematik vid teknisk fakultet. UKÄ-rapport. Stockholm 1973.

Nacome, Overview and Analysis of School Mathematics, Grades K-12. Conference Board of the Mathematical Sciences. Washington 1975.

Nordisk Skolmatematik. Nordiska utredningar. 1967:9. Stockholm 1967.

Norinder, Y., En undersökning om kvarsittning och studieavbrott vid fackgymnasier. I: Specialutredningar om gymnasiet. SOU 1963:41. Stockholm 1963.

OECD, Mathematical Education of Engineers. Paris 1965.

OEEC, New Thinking in school mathematics. Paris 1961.

Orring, J., Flyttning, kvarsittning och utkuggning i högre skolor i relation till folkskolans betygssättning. SOU 1959:35. Stockholm 1959.

Patriksson, G., Utbildningssociologi - en introduktion. Lund: Studentlitteratur 1971.

Pollak, H., Applications of Mathematics. I: Mathematics Education. The 69:th yearbook of NSSE. Chicago: University of Chicago Press 1970.

RESULTATGRUPPEN, Studieeffektivitet vid teknisk fakultet. UKÄ-rapporter 24 a och b. Stockholm 1974.

Riksföreningen för lärarna i matematik, fysik och kemi, Skrivelse till SÖ. Elementa 1971 nr 4. Uppsala 1971.

Riksföreningen för lärarna i matematik, fysik och kemi, Skrivelse till SÖ. Elementa 1974 nr 1. Uppsala 1974.

Rosenshine, B., Teaching Behaviors and Student Achievement. London: National Foundation for Educational Research 1971.

Sarason, S., The Culture of the School and the Problem of Change. Boston: Allyn and Bacon 1972.

SCB, Elevströmmar och betyg i gymnasieskolan. Stockholm: Statistiska Centralbyrån 1976.

Scott m fl, The Use of Mathematics in the Electrical Industry. London: Pitmans 1966.

Sjöberg, G., Gymnasisternas arbetsförhållanden 3. Pedagogiskt utvecklingsarbete vid Stockholms skolor 56. Stockholm 1974.

Sjöstrand, W., Skolreformen i stöpsleven. Svensk skolpolitik i vetenskaplig belysning. Ett diskussionsinlägg. Stockholm 1954.

Svensson, A., Studieavbrott och linjebytare i gymnasieskolan. Stockholm: SÖ 1975.

Svensson, N-E., Ability Grouping and Scholastic Achievement. Stockholm: A & W 1962.

Sveriges Lärarförbund, Yttrande över SÖ:s förslag till översyn av läroplan för grundskolan 1968-02-05. Stockholm 1968.

SÖ, Det nya gymnasiet. Stockholm 1952.

SÖ, Översikt av vitsord i läroämnen, utdelade vid allmänna läroverk och kommande gymnasier 1953. I: Aktuellt 1955:4. Stockholm 1955.

SÖ, Undervisningsplan för rikets folkskolor. Stockholm 1955 a.

SÖ, Kursplaner och metodiska anvisningar för realskolan. Stockholm 1955 b.

SÖ, Timplaner och huvudmoment vid försöksverksamhet med nioårig enhetsskola. Stockholm 1959.

SÖ, Enhetsskolan under tio år. Stockholm 1960.

SÖ, Grundskolan. SOU 1961:30. Stockholm 1961.

SÖ, Läroplaner för grundskola och fackskolor. SOU 1961:31. Stockholm 1961.

SÖ, Läroplansöversyn. Grundskolan. Stockholm 1967.

SÖ, Läroplan för grundskolan. Stockholm 1969.

SÖ, Undersökning rörande vissa frågor inom ämnet matematik i grundskolan vårterminen 1972. (Stencil) Stockholm 1972.

SÖ, Basfärdigheter i matematik. Stockholm 1973.

SÖ, Aktuellt från SÖ. Pedagogiska nämnden. Specialnummer september 1975. Stockholm 1975 b.

SÖ, Undersökning av elevernas räknefärdighet inom grundskolan. (Stencil) Stockholm 1975 b.

SÖ, Naturvetenskaplig utbildning. Lägesrapport del 2 från N-gruppen. Stockholm 1977.

Torper, U., Pedagogisk forskning kring tidsallokering i skolan. Rapport nr 134. Göteborg: Göteborgs universitet, pedagogiska institutionen. 1976.

Uggla, I-L., Effekten av femdagars skolarbetsvecka ur sociologiska synpunkter. I: Skolans arbetstider. SOU 1967:14. Stockholm 1967.

UHÄ, Utbildningsplanering för förnyelse. Delrapport 3. UHÄ-rapport 1977:1. Stockholm 1977.

UHÄ, Begreppsbildning och kunskapstillägnande inom några universitetsämnen. Rapport från ett symposium i Kungälv. UHÄ-rapport 1977:3. Stockholm 1977.

UHÄ, M-utredningen 1977. Utbildningsrådet för Maskinteknik. UHÄ-rapport 1977:8. Stockholm 1977.

UKÄ, Teknologers förkunskaper i matematik. Stockholm 1972.

UNESCO, New Trends in Mathematics Teaching. 3. Paris: UNESCO 1972.

UNESCO, New Trends in Mathematics Teaching. 4. Paris: UNESCO 1978.

Witkin, H.A., m fl, Educational Implications of Cognitive Styles. Review of Educational Research. Vol 47, No. 1. Washington 1977.

Wood, R., Objectives in the teaching of mathematics. Educational Research, X. 1968.

Pu-enheten
Kungliga Tekniska Högskolan
100 44 STOCKHOLM 70